

MUHANDISLIK

& IQTISODIYOT

ijtimoiy-iqtisodiy, innovatsion texnik,
fan va ta'limga oid ilmiy-amaliy jurnal

2026-YIL

OKTABR / 10-SON, I-QISM



Milliy nashrlar

OAK: <https://oak.uz/pages/4802>

05.00.00 – Texnika fanlari

08.00.00 – Iqtisodiyot fanlar



Google
Scholar

ISSN
INTERNATIONAL
STANDARD
SERIAL
NUMBER
INTERNATIONAL CENTRE

OpenAIRE



ISSN: 3060-463X

РЭУ.РФ
ИМЕНИ Г.В. ПЛЕХАНОВА
ТАШКЕНТСКИЙ ФИЛИАЛ



muhandislik & iqtisodiyot

ijtimoiy-iqtisodiy, innovatsion texnik,
fan va ta'limga oid ilmiy-amaliy jurnal

Elektron nashr, 2026-yil, oktabr.

Bosh muharrir:

Zokirova Nodira Kalandarovna, iqtisodiyot fanlari doktori, DSc, professor

Bosh muharrir o'rinbosari:

Shakarov Zafar G'afarovich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori, PhD, dotsent

Tahrir hay'ati:

Abduraxmanov Kalendar Xodjayevich, O'z FA akademigi, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Sharipov Kongratbay Avezimbetovich, texnika fanlari doktori, professor

Maxkamov Baxtiyor Shuxratovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Abduraxmanova Gulnora Kalandarovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Shaumarov Said Sanatovich, texnika fanlari doktori, professor

Turayev Bahodir Xatamovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Nasimov Dilmurod Abdulloyevich, iqtisodiyot fanlari doktori (DSc), professor

Allayeva Gulchexra Jalgasovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Arabov Nurali Uralovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Maxmudov Odiljon Xolmirzayevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Xamrayeva Sayyora Nasimovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bobonazarova Jamila Xolmurodovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Irmatova Aziza Baxromovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bo'taboyev Mahammadjon To'ychiyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Shamshiyeva Nargizaxon Nosirxuja kizi, iqtisodiyot fanlari doktori, professor,

Xolmuxamedov Muhsinjon Murodullayevich, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Xodjayeva Nodiraxon Abdurashidovna, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Amanov Otabek Amankulovich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Toxirov Jaloliddin Ochil o'g'li, texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Qurbonov Samandar Pulatovich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Zikriyoyev Aziz Sadulloyevich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Tabayev Azamat Zaripbayevich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Sxay Lana Aleksandrovna, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Ismoilova Gulnora Fayzullayevna, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Djumaniyazov Umrbek Ilxamovich, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Kasimova Nargiza Sabitdjanovna, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Kalanova Moxigul Baxritdinovna, dotsent

Ashurzoda Luiza Muxtarovna, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Sharipov Sardor Begmaxmat o'g'li, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Tursunov Ulug'bek Sativoldiyevich, iqtisodiyot fanlari doktori (DSc), dotsent

Bauyetdinov Majit Janizaqovich, Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti dotsenti, PhD

Botirov Bozorbek Musurmon o'g'li, Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Sultonov Shavkatjon Abdullayevich, Kimyo fanlari doktori, (DSc)

Jo'raeva Malohat Muhammadovna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor.

Yusupov Maxamadamin Abduxamidovich, iqtisodiyot fanlari nomzodi (DSc), professor

Kalonova Moxigul Baxritdinovna, iqtisodiyot fanlari nomzodi (PhD), dotsent

Mirzayev Kulmamat Djanzakovich, iqtisodiyot fanlari nomzodi (DSc), professor.

Karimova Nilufar Sadirdin qizi, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Norboyev Odil Abrayevich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Pardaev Umidjon Uralovich, iqtisodiyot fanlari doktori (DSc), professor

Xolmirzayev Ulug'bek Abdulazizovich, Iqtisodiyot fanlari doktori (DSc)

muhandislik & iqtisodiyot

ijtimoiy-iqtisodiy, innovatsion texnik,
fan va ta'limga oid ilmiy-amaliy jurnal

- 05.01.00 – Axborot texnologiyalari, boshqaruv va kompyuter grafikasi
- 05.01.01 – Muhandislik geometriyasi va kompyuter grafikasi. Audio va video texnologiyalari
- 05.01.02 – Tizimli tahlil, boshqaruv va axborotni qayta ishlash
- 05.01.03 – Informatikaning nazariy asoslari
- 05.01.04 – Hisoblash mashinalari, majmualari va kompyuter tarmoqlarining matematik va dasturiy ta'minoti
- 05.01.05 – Axborotlarni himoyalash usullari va tizimlari. Axborot xavfsizligi
- 05.01.06 – Hisoblash texnikasi va boshqaruv tizimlarining elementlari va qurilmalari
- 05.01.07 – Matematik modellash
- 05.01.11 – Raqamli texnologiyalar va sun'iy intellekt
- 05.02.00 – Mashinasozlik va mashinashunoslik
- 05.02.08 – Yer usti majmualari va uchish apparatlari
- 05.03.02 – Metrologiya va metrologiya ta'minoti
- 05.04.01 – Telekommunikatsiya va kompyuter tizimlari, telekommunikatsiya tarmoqlari va qurilmalari. Axborotlarni taqsimlash
- 05.05.03 – Yorug'lik texnikasi. Maxsus yoritish texnologiyasi
- 05.05.05 – Issiqlik texnikasining nazariy asoslari
- 05.05.06 – Qayta tiklanadigan energiya turlari asosidagi energiya qurilmalari
- 05.06.01 – To'qimachilik va yengil sanoat ishlab chiqarishlari materialshunosligi
- 05.08.03 – Temir yo'l transportini ishlatish
- 05.08.06 – "G'ildirakli va gusenisali mashinalar va ularni ishlatish" (texnika fanlari)
- 05.09.01 – Qurilish konstruksiyalari, bino va inshootlar
- 05.09.04 – Suv ta'minoti. Kanalizatsiya. Suv havzalarini muhofazalovchi qurilish tizimlari
- 10.00.06 – Qiyosiy adabiyotshunoslik, chog'ishtirma tilshunoslik va tarjimashunoslik
- 10.00.04 – Yevropa, Amerika va Avstraliya xalqlari tili va adabiyoti
- 08.00.01 – Iqtisodiyot nazariyasi
- 08.00.02 – Makroiqtisodiyot
- 08.00.03 – Sanoat iqtisodiyoti
- 08.00.04 – Qishloq xo'jaligi iqtisodiyoti
- 08.00.05 – Xizmat ko'rsatish tarmoqlari iqtisodiyoti
- 08.00.06 – Ekonometrika va statistika
- 08.00.07 – Moliya, pul muomalasi va kredit
- 08.00.08 – Buxgalteriya hisobi, iqtisodiy tahlil va audit
- 08.00.09 – Jahon iqtisodiyoti
- 08.00.10 – Demografiya. Mehnat iqtisodiyoti
- 08.00.11 – Marketing
- 08.00.12 – Mintaqaviy iqtisodiyot
- 08.00.13 – Menejment
- 08.00.14 – Iqtisodiyotda axborot tizimlari va texnologiyalari
- 08.00.15 – Tadbirkorlik va kichik biznes iqtisodiyoti
- 08.00.16 – Raqamli iqtisodiyot va xalqaro raqamli integratsiya
- 08.00.17 – Turizm va mehmonxona faoliyati

Ma'lumot uchun, OAK
Rayosatining 2024-yil 28-avgustdagi 360/5-son qarori bilan "Dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro'yxati"ga texnika va iqtisodiyot fanlari bo'yicha "Muhandislik va iqtisodiyot" jurnali ro'yxatga kiritilgan.

Muassis: "Tadbirkor va ishbilarmon" MChJ

Hamkorlarimiz:

1. Toshkent shahridagi G.V.Plexanov nomidagi Rossiya iqtisodiyot universiteti
2. Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti
3. Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligini mexanizatsiyalash muhandislari instituti" milliy tadqiqot universiteti
4. Islom Karimov nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti
5. Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
6. Toshkent davlat transport universiteti
7. Toshkent arxitektura-qurilish universiteti
8. Toshkent kimyo-texnologiya universiteti
9. Jizzax politexnika instituti



MUNDARIJA

LEARNING TRAJECTORIES OF INCLUSIVE LEARNERS IN AN INTENSIVE PEER-TO-PEER LEARNING ENVIRONMENT: POOL-TO-MAIN-TRACK TRANSITION AND PERSISTENCE	9
Ibrojimova Nodira	
DON MAHSULOTLARI KORXONALARIDA RESURSLARDAN FOYDALANISH SAMARADORLIGINI BAHOLASH VA TAKOMILLASHTIRISH YO'LLARI	14
Aipova Iroda Ikramovna	
BOSHQARUV HISOBOTI SIFATINI BAHOLASH, ICHKI NAZORAT VA AUDIT MEKANIZMLARINI TAKOMILLASHTIRISH.....	18
Eshniyazova Yulduz Yuldashbayevna	
KONTREYLER TASHISHLARINI TASHKIL ETISHDA YUK OQIMLARINI TRANSPORT TARMOG'I BO'YICHA TAQSIMLASH.....	22
Yakupbayev Xamid, Myxamedova Ziyoda, Boboyev Diyor	
QUYOSH ENERGIYASI ASOSIDAGI NAMLANTIRISH-BUG'LANTIRISH USULIDAGI CHUCHUKLASHTIRISH TEXNOLOGIYALARI: TIZIM VA KOMPONENT DARAJASIDAGI INNOVATSIYALARNING TAHLILIIY SHARHI.	28
G'afurova Marjona Tolib qizi	
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ ОЦЕНКЕ КРЕДИТНОГО РИСКА В КОММЕРЧЕСКИХ БАНКАХ	34
Джуманиязов Икрам Каримбаевич	
BANK RISKLARINI BOSHQARISHDA INTELLEKTUAL TEXNOLOGIYALAR: XORIJIY TAJRIBA VA O'ZBEKISTONDA BARQAROR MOLIYAVIY RIVOJLANISH UCHUN YO'NALISHLAR	40
Mirsoatov Alisher Qudratullayevich	
ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ ГЛАСПИРИНА.....	48
Р. К. Каримов, С. С. Саидов, Ф. Ахмедова	
O'ZBEKISTONDA VALYUTA SIYOSATI ORQALI IQTISODIY RIVOJLANISHNI TA'MINLASH TIZIMINI TAKOMILLASHTIRISH YO'LLARI.....	53
Norbaeva Muxlisa Akram qizi	
MARKAZLASHTIRILGAN KAPITAL QO'YILMALAR HISOBIGA MOLIYALASHTIRILADIGAN QURILISH OBYEKTLARIDA XARAJATLAR TARKIBINING DINAMIK TAHLILI.....	63
Bozorov Bobur Haqberdiyevich	
"TUMSHUKTAU" KONI TEXNOLOGIK NAMUNASINI SORBSION SIANLASH ORQALI QIMMATBAHO METALLAR AJRATIB OLISH DARAJASINI TADQIQ QILISH.....	70
Xolmurodov Feruzjon, Raupov Subhonjon	
KONSALTING KOMPANIYALARIDA RAQAMLI TRANSFORMATSIYA JARAYONLARINI STRATEGIK BOSHQARISH MEKANIZMLARINI TAKOMILLASHTIRISH.....	75
Ermamatova Shohsanam Ermamat qizi	
РОЛЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ В РАЗВИТИИ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ: ОПЫТ УЗБЕКИСТАНА ..	81
Абдураимова Нилуфар Хусеновна	
FACTORS INFLUENCING CUSTOMER TRUST AND BRAND PERCEPTION IN INSURANCE COMPANIES: PERSONAL EXPERIENCE, BORROWED EXPERIENCE AND THE ASYMMETRY OF THE CLAIM	87
Ibragimova Maftunakhon Shukhratjon kizi	
TIBBIY BOG'LOV MATERIALLARI ISHLAB CHIQRISH JARAYONIDA HOSIL BO'LADIGAN OQOVA SUVLAR VA ULARNI TOZALASH IMKONIYATLARI	94
Abdullayeva D.K., Bozorboyeva L.U.	
O'ZBEKISTONDA ONKOLOGIK KASALLIKLAR BILAN KASALLANISHNING BOLALAR STATISTIK TAHLILI	98
Yakubov Maksadxan, To'ychiyeva Dilnavozxon	



ORTOTROP PARALLELEPIPED MASALASINI DEFORMATSIYA NAZARIYASI ASOSIDA SONLI YECHISH	103
Yusupov Yusufbay, Yusupova Nazokat	
TRIKOTAJ MATOLARINING KO'P DAVRLI CHO'ZILISH DEFORMATSIYASINI MATEMATIK	
MODELLASHTIRISH VA REGRESSIYA TAHLILI	113
Axmedova Moxinur Fayzullo qizi, Ubaydullayeva Dilara Hamidovna	
MASHINASOZLIK ISHLAB CHIQRISHIDA 3D MODELLASHTIRISHNING ROLI	119
Usmonov Abbos Valijon o'g'li	
BUYUMLAR INTERNETIDA XAVFSIZLIK VA MAXFIYLIKNI BOSHQARISHNING INTEGRATSIYALASHGAN	
KONSEPTUAL MODEL	123
Habibjonova Guldofarid Murodjon qizi	
TURISTIK BRENDNI RAQAMLI MARKETING VOSITALARI ASOSIDA SHAKLLANTIRISH VA ILGARI	
SURISHNING TASHKILIY-IQTISODIY MEXANIZMI	131
Tursunova Shaxnoza Farxod qizi	
TABIIY GAZNI NORDON GAZLARDAN TOZALASH JARAYONINING TEXNOLOGIK SXEMASI VA ABSORBER	
QURILMASINING ISHLASH SAMARADORLIGI	137
Nazarov Feruz, Abdirashidov Durbek, Nazarov Farxod	
O'ZBEKISTON OLIY TA'LIM TIZIMIDA IQTISODIY FAOLIYAT VA ADAPTIV BOSHQARUVNING	
ZAMONAVIY HOLATI TAHLILI	142
O'lmasxo'jayev Zoirxo'ja Abbos o'g'li	
NUMERICAL MODELING OF THREE-PHASE OIL-GAS-WATER FILTRATION IN A SINGLE-LAYER TWO-	
DIMENSIONAL POROUS MEDIUM	147
Ismailov Shixnazar, Artikbaeva Gulstan	
MEVA TERISH MASHINASI VA TIRKAMA AGREGATINING TORMOZLANISH JARAYONIDA ILMOQ KUCHI	
VA G'ILDIRAKLARGA TA'SIR ETUVCHI REAKSIYA KUCHLARINI NAZARIY TAHLIL QILISH	154
Norchayev Davron, Sardor Nigmatjonov, Norchayev Jaloliddin, Norchayev Rustam	
TARTIBGA SOLINADIGAN TARIF SHAROITIDA ELEKTR TARMOQLARI AKTIVLARINING	
QADRSIZLANISH TESTI MODEL	160
Mardanov Muzaffar Xolboyevich	
ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ КАК ИНСТРУМЕНТ ПОВЫШЕНИЯ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ	
ПРЕДПРИЯТИЯ	166
Нигмонходжаев А. А.	
CONTINUOUS-CIRCULATION CALORIMETRY AND FLOW-SPLIT UNCERTAINTY IN A TWO-BRANCH	
SOLAR RADIANT-FLOOR SYSTEM WITH MACROENCAPSULATED RT52	171
Jurabek Kamolov, Sokhib Temirov, Marjona Makhmudova	
CONTINUOUS-CIRCULATION CALORIMETRY AND FLOW-SPLIT UNCERTAINTY IN A TWO-BRANCH	
SOLAR RADIANT-FLOOR SYSTEM WITH MACROENCAPSULATED RT52	171
Jurabek Kamolov, Sokhib Temirov, Marjona Makhmudova	
XIZMAT KO'RSATISH SOHASINING INNOVATSION RIVOJLANISH DARAJASINI BAHOLASH	
METODIKASINI TAKOMILLASHTIRISH	178
Erdonov Muhammadamin Erdon o'g'li	
OBODONLASHTIRISH XIZMATLARI SUBYEKTLARIDA AN'ANAVIY KALKULYATSIYA USULLARINI	
TAKOMILLASHTIRISH	186
Sohibov Axmatjon Fazliddinovich	
KOMBINATSIYALASHGAN HAVZALI QUYOSH SUV CHUCHUTGICH QURILMASI HAVO KOLLEKTORINING	
HARORAT REJIMINI TAJRIBAVIY TADQIQ ETISH	192
Ibragimov Umidjon, Avanesov Tigran, Mirzayorova Sevara	
СОВРЕМЕННЫЕ СТРАТЕГИИ РАСШИРЕНИЯ КЛИЕНТСКОЙ БАЗЫ КОММЕРЧЕСКИХ БАНКОВ	197
Янгибоев Фуркат Баходирович	
TIJORAT BANKLARIDA MOLIVAVIY XIZMATLAR SIFATINI OSHIRISH YO'LLARI	203
Valiyev Doniyor Baxtiyor o'g'li	



OPPORTUNITIES FOR ACHIEVING ECONOMIC STABILITY IN UZBEKISTAN THROUGH EXPORT DEVELOPMENT AND INVESTMENT.....	210
Feruzbek Otaboev	
UZUMZORLAR UCHUN ROSTLANUVCHI AGROFOTOELEKTRIK QURILMALARDA MODULLARNING MAVSUMIY QIYALIGINI TANLASHNING RADIATION-ENERGETIK METODIKASI	220
Shog'o'chqorov Sanjar, Raxmatov Anvar, Abdufattoyeva Elnuraxonposhsho	
MICE SEGMENTINI MILLIY STATISTIKA TIZIMIDA HISOBGA OLIH: SATELLIT-HISOB VA INDIKATORLAR TIZIMI METODOLOGIYASI	226
Musayeva Sayyora Abduvaxitovna	
RESEARCH INTO THE PROCESS OF OBTAINING A NEW GRADE OF BITUMEN	232
Dustov Khamro, Panoev Erali, Salimov Khalim	
CLASSIFICATION OF PHASE-CHANGE MATERIALS: A BRIEF REVIEW.....	237
B.A. Hikmatov, M.S. Mirzaev	
ОБ АЛГОРИТМАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ И ФАКТОРИЗАЦИИ.....	244
Махмудов Адил, Хусаинов Наримон	
YASHIL IQTISODIYOTNI RIVOJLANTIRISHDA BARQAROR TRANSPORTNING O'RNI.....	251
Egamnazarov Bexzod Bahromjon o'g'li	
KICHIK VA O'RTA BIZNES SUBYEKTLARIDA RAQAMLI MARKETING SALOHİYATI VA BOSHQARUV KOMPETENSIYALARINING O'SISH SUR'ATLARIGA TA'SIRI	258
Ro'ziyev Abdurahmon Rustam o'g'li	
KOSSER DOIRAVIY SILINDRIDA BUROVCHI TO'LQINLAR: CHASTOTA TENGLAMASI VA UZUN TO'LQIN TEZLIGINING O'LCHAM EFFEKTI.....	264
Mirzoyeva G. T.	

KOSSER DOIRAVIY SILINDRIDA BUROVCHI TO'LQINLAR: CHASTOTA TENGLAMASI VA UZUN TO'LQIN TEZLIGINING O'LCHAM EFFEKTI

Mirzoyeva G. T.

Aniq fanlar kafedrası assistenti, Buxoro davlat texnika universiteti, O'zbekiston.

E-mail: gmirzoyeva@bstu.uz

ORCID: 0009-0007-7663-9301

Annotatsiya. Kosser (mikropolyar) muhit mikrostrukturali materiallarda to'liqlarning o'lchamga bog'liq tarqalishini tasvirlaydi, biroq silindrik to'liq o'tkazgichdagi burovchi to'liqlar uchun yopiq ko'rinishdagi natijalar yetarli emas. Ishda chiziqli izotrop Kosser materialidan yasalgan, yon sirti erkin doiraviy silindrda o'qqa simmetrik burovchi tipdagi to'liqlar o'rganilgan. Siljish va mikroburilish maydonlari potentsiallar orqali ajratilib, Bessel funksiyalaridagi aniq yechim qurilgan; chastota tenglamasi 3×3 determinant ko'rinishida yozilgan; uzun to'liq limiti chegaraviy qatlamli statik buralish yechimi orqali topilgan. Hajmiy xarakteristik tenglamaning ikkala ildizi haqiqiy ekani isbotlangan. Uzun to'liq tezligi uchun burash qattiqligining o'lcham effekti va mikroinersiyani oshkor hisobga oluvchi yopiq formula olingan, kesim chastotalari ikki mustaqil qismga ajralishi ko'rsatilgan. Model parametrlarining qabul qilingan to'plamida ($R=3 \text{ mm}$) $c_0/c_T=0,8745$; bunda burash qattiqligi klassik qiymatdan 3,7% yuqori, aylanma inersiya esa 35,6% katta. Yopiq formula va aniq determinant $3 \cdot 10^{-10}$ dan yaxshi aniqlikda mos keladi. Natijalar Kosser sterjenlarda burovchi to'liqlar tezligini radius bo'yicha baholash va mikrostruktura doimiylarini to'liq o'lchovlaridan aniqlash uchun asos bo'ladi.

Kalit so'zlar: Kosser (mikropolyar) elastikligi, silindrik to'liq o'tkazgich, burovchi to'liqlar, chastota tenglamasi, kesim chastotasi, o'lcham effekti, mikroinersiya.

Abstract. The Cosserat (micropolar) medium describes size-dependent wave propagation in microstructured materials, but closed-form results for torsional waves in a cylindrical waveguide remain insufficient. Axisymmetric torsional-type waves in a circular cylinder with a traction-free lateral surface, made of a linear isotropic Cosserat material, are studied. Displacement and microrotation fields are decoupled via potentials to construct an exact solution in terms of Bessel functions; the frequency equation is written as a 3×3 determinant, and the long-wave limit is derived using the boundary-layer static torsion solution. Both roots of the bulk characteristic equation are proved to be real. A closed-form expression for the long-wave speed explicitly accounting for the size effect of torsional stiffness and micro-inertia is obtained, and cut-off frequencies are shown to split into two independent families. For the assumed model parameters ($R=3 \text{ mm}$) $c_0/c_T=0,8745$, with the torsional stiffness exceeding the classical value by 3.7% and the rotational inertia being 35.6% larger. The closed-form formula agrees with the exact determinant to better than $3 \cdot 10^{-10}$. The results provide a basis for evaluating the radius-dependent torsional wave speed in Cosserat rods and determining microstructural constants from wave measurements.

Keywords: Cosserat (micropolar) elasticity, cylindrical waveguide, torsional waves, frequency equation, cut-off frequency, size effect, micro-inertia.

Аннотация. Среда Коссера (микрополярная) описывает размерно-зависимое распространение волн в микроструктурированных материалах, однако замкнутые результаты для крутильных волн в цилиндрическом волноводе остаются недостаточными. Исследованы осесимметричные волны крутильного типа в круговом цилиндре со свободной боковой поверхностью из линейного изотропного материала Коссера. Поля смещений и микровращений разделены с помощью потенциалов и построено точное решение в функциях Бесселя; частотное уравнение записано в виде определителя 3×3 , а длинноволновый предел найден из решения задачи статического кручения с пограничным слоем. Доказано, что оба корня объёмного характеристического уравнения вещественны. Получена замкнутая формула для длинноволновой скорости, явно учитывающая размерный эффект крутильной жёсткости и микроинерции; показано, что частоты отсечки распадаются на два независимых семейства. Для принятых модельных параметров ($R=3 \text{ mm}$) $c_0/c_T=0,8745$, при этом крутильная жёсткость на 3,7% выше классического значения, а вращательная инерция больше на 35,6%. Замкнутая формула согласуется с точным определителем с точностью выше $3 \cdot 10^{-10}$. Результаты могут служить основой для оценки скорости крутильных волн в стержнях Коссера в зависимости от радиуса и для определения микроструктурных постоянных по волновым измерениям.

Ключевые слова: упругость Коссера (микрополярная), цилиндрический волновод, крутильные волны, частотное уравнение, частота отсечки, размерный эффект, микроинерция.



KIRISH

Kosser (mikropolyar) kontinuumi E. va F. Kosserlar tomonidan kiritilgan [1] hamda A. Eringen va V. Novatskiy ishlarida to'liq chiziqli nazariya shakliga keltirilgan [2–4]. Ushbu nazariyada siljish maydoniga mustaqil mikroburilish maydoni va moment kuchlanishlari qo'shiladi. Shuningdek, yaqin yondashuv sifatida moment kuchlanishli modellar ham ishlab chiqilgan [5–7]. Kosser effektlari ko'pik va suyak kabi g'ovak materiallarda tajribada kuzatilgan bo'lib [8, 9], barcha doimiylarni aniqlash masalalari ham o'rganilgan [10].

Cheklangan ko'ndalang o'lchamli silindrik to'lqin o'tkazgichda buruvchi tipdagi to'lqinlar uchun mikrostruktura ta'sirini oshkor ifodalovchi yopiq natijalarni yanada to'ldirish talab etiladi. Bu to'lqin tezligining radiusga bog'liqligini baholash va mikrostruktura doimiylarini to'lqin o'lchovlaridan aniqlash imkoniyatini kengaytiradi.

Tadqiqotning maqsadi doiraviy Kosser silindri uchun aniq chastota tenglamasi va hajmiy ildizlar tuzilishini, uzun to'lqin tezligining yopiq formulasini hamda kesim chastotalari uchun aniq tenglamalarni olishdan iborat. Ishning ilmiy yangiligi yon sirti erkin doiraviy Kosser silindrida buruvchi tipdagi to'lqinlarning aniq chastota tenglamasi, o'lcham effekti va mikroinersiyani hisobga oluvchi yopiq formula hamda kesim chastotalari tenglamalarining aniqlanganligidir. Asosiy natijalar — (22) formula va (23), (24) tenglamalar — aniq determinant bilan sonli solishtirilgan.

MAVZUGA OID ADABIYOTLAR SHARHI

Klassik elastik sterjenlarda chastotalar spektri Pochhammer–Chree tenglamalaridan topiladi [11–14]. Mikropolyar muhitda yarim fazoning tekis chegarasidan tekis to'lqinlarning qaytishi [15] hamda Lyav to'lqinlari uchun subsonik tezlikning mavjudligi va yagonaligi o'rganilgan [16]. Ushbu ishlarda yarim fazo uchun masalaning qo'yilishi yetarlicha yoritilgan bo'lsa-da, chekli ko'ndalang o'lchamli silindr holati kamroq tadqiq etilgan. Mazkur matnni tahrirlash jarayonida sun'iy intellekt imkoniyatlaridan ham foydalanildi.

Doiraviy silindrning mikropolyar elastik tebranishlari [17] va Sen-Venan tipidagi masalalari [18] chekli o'lchamli silindrik jismlarda mustaqil mikroburilish maydoni hamda moment kuchlanishlarini hisobga olish va statik deformatsiyadagi mikropolyar effektlarni ochib berish uchun asos bo'ldi. Shunga qaramay, ko'rib chiqilgan manbalarda yon sirti erkin Kosser silindri uchun buruvchi tipdagi to'lqinlarning aniq chastota tenglamasi, uzun to'lqin tezligining o'lcham effekti hamda mikroinersiyani hisobga oluvchi yopiq formula va kesim chastotalarining oshkor tenglamalari to'liq aks etmagan.

O'zbekiston ilmiy maktabida X. Xudoynazarov va hammualliflar ko'p qatlamli qovushqoq-elastik silindrik qobiq hamda sterjenlarning buruvchi tebranishlari uchun aniqlashtirilgan tenglamalarni qurib, tebranish chastotalarini tahlil qilganlar [19–21]. I.I. Safarov, M.X. Teshayev, Z.I. Boltayev va boshqalarning ishlarida esa silindrik qobiqlarda xos to'lqinlarning dispersiya hamda dissipativ xossalari o'rganilgan [22, 23].

Ushbu tadqiqot masalaning qo'yilishi va dispersiya tenglamasini sonli tahlil qilish uslubi bo'yicha ko'rsatilgan ishlarga tayanadi. Biroq mazkur manbalarda muhit klassik yoki qovushqoq-elastik kontinuum sifatida qaralib, mikroburilish maydoni hamda moment kuchlanishlar kiritilmagan. Oqibatda, materialning xarakteristik uzunligi va mikroinersiyasi orqali yuzaga keladigan o'lcham effekti e'tibordan chetda qolib, radiusi kichik sterjenlardagi og'ishlarni tavsiflash imkoniyati cheklangan. Ushbu maqolada klassik modeldan Kosser kontinuumiga o'tish orqali anashu ilmiy bo'shliq to'ldiriladi.

TADQIQOT METODOLOGIYASI

Tadqiqot nazariy-analitik xarakterga ega bo'lib, analitik chiqarishlar sonli hisoblash va aniq yechim bilan o'zaro solishtirish orqali tekshirilgan. Metodologik jihatdan tadqiqotda chiziqli izotrop Kosser kontinuumi modeli, potentsiallar usuli, Bessel funksiyalaridagi aniq yechim, determinantli chastota tenglamasi, chegaraviy qatlamli statik buralish yechimi va chekli ayirmalar bilan tekshiriladigan sonli ildiz qidirish usullari qo'llanildi. Tadqiqot quyidagi bosqichlardan iborat.

1-bosqich. Model. Muhit sifatida Eringen–Nowacki shaklidagi chiziqli izotrop Kosser (mikropolyar) kontinuumi qabul qilingan [2–4]. U siljish maydoni u bilan birga mustaqil mikroburilish maydoni θ va moment kuchlanishlarni hisobga oladi. Harakat tenglamalari (1), (2) [16] dagi belgilashlarda yozilgan; $\theta=1/2 \nabla \times u$ bo'lganda model klassik Lamé–Navier tenglamalariga o'tadi.

2-bosqich. Maydonlar sinfi va tenglamalarni ajratish. Silindrik koordinatalar (r, θ, z) da θ ga bog'liq bo'lmagan (3) ko'rinishdagi maydonlar sinfi qaraladi. Bu sinf (1), (2) tenglamalarga nisbatan yopiq. Mikroburilish vektori φ va ψ potentsiallar orqali ifodalanadi (4); natijada tizim uchta skalyar tenglamaga ajraladi: o'zaro bog'langan (5), (6) va mustaqil (7).

3-bosqich. Hajmiy yechim. Maydonlar $\exp[i(kz - \omega t)]$ ko'paytuvchi bilan va radial yo'nalishda Bessel funksiyalari orqali qidiriladi. (5), (6) tizimdan $s=q^2+k^2$ ga nisbatan (11), (12) tenglamalar kelib chiqadi; uning ikkala ildizi

haqiqiy ekani Lemmada isbotlanadi. Regulyarlik talabi $r=0$ da Y_v funksiyasini chiqarib tashlaydi, argument kvadrati manfiy bo'lganda J_v o'rniga I_v olinadi.

4-bosqich. Chastota tenglamasi. Yon sirt $r=R$ da kuch va moment yuklamalari yo'q deb qabul qilinadi (15). Umumiy yechimni (8)–(10) ifodalarga qo'yib, c_1, c_2, c_3 ga nisbatan bir jinsli 3×3 tizim olinadi; uning determinanti (17) chastota tenglamasini beradi. Ikki alohida holat hisobga olinadi: $\omega = \omega_c$ dagi soxta ildiz va $q_n = 0$ dagi ildizlar.

5-bosqich. Uzun to'lqin limiti. Asosiy tarmoq uchun $\omega = c_0 k + O(k^3)$ deb olinadi, $c_0^2 = K/I$. Burash qattiqligi K solishtirma burilishi τ bo'lgan statik buralish masalasidan topiladi: qattiq aylanish maydoni $r=R$ da $m_{rr} = 0$ shartini qanoatlantirmagani uchun u (7) tenglamaning $\omega = k = 0$ dagi yechimi bilan to'ldiriladi (chegaraviy qatlam, (18), (19)); burovchi moment $T = \int_S (r\sigma_{\theta z} + m_{zz}) dS$ integrallanib, $K = T/\tau$ olinadi (21). Aylanma inersiya I ga siljish va mikroburilish maydonlarining hissalarini qo'shiladi; shu bilan (22) formula hosil bo'ladi.

6-bosqich. Kesim chastotalari. $k=0$ da determinantning bir qator elementlari nolga aylanadi va u ikki ko'paytuvchiga ajraladi; bu A qism ((23), φ -moda) va B qism ((24), burovchi juft) uchun mustaqil tenglamalarni beradi.

7-bosqich. Sonli amalga oshirish. Chastota tenglamasining ildizlari determinantning ishora o'zgarishi bo'yicha zich ω to'rida qidiriladi va Brent usuli bilan aniqlashtiriladi; hisoblash tartibi va model parametrlari keyingi kichik bo'limga keltirilgan.

8-bosqich. Natijalarning ishonchligini baholash. Natijalar quyidagi mezonlar bo'yicha tekshirilgan: (22) yopiq formula aniq determinantning $k \rightarrow 0$ limiti bilan bir necha radius uchun solishtirilgan (2-jadval); $|c(k) - c_0|/c_0 = O(k^2)$ yaqinlashish tartibi log-log grafikda tekshirilgan (3b-rasm); (23), (24) tenglamalardan olingan kesim chastotalari $kR = 0,005$ dagi aniq determinant ildizlari bilan solishtirilgan; Lemma shartlari qabul qilingan parametrlarda tekshirilgan.

Masalaning qo'yilishi va asosiy tenglamalar

(r, θ, z) — silindrik koordinatalar, u — siljish, ϑ — mikroburilish, ρ — zichlik, ρJ — mikroinersiya zichligi (J uzunlik kvadrati o'lchamiga ega) bo'lsin. Eringen–Nowacki shaklidagi chiziqli izotrop Kosser muhiti kuch kuchlanishlari bo'yicha λ_e, μ_e, μ_c modullari va moment kuchlanishlari (egrilik) bo'yicha g_1, g_2, g_3 modullari bilan tavsiflanadi; bunda $g_1 = \mu_e L_c^2 \alpha_1, L_c$ — xarakteristik uzunlik, α_1 — o'lchamsiz koeffitsientlar. Harakat tenglamalari [16] dagi belgilashlarda quyidagi ko'rinishga ega

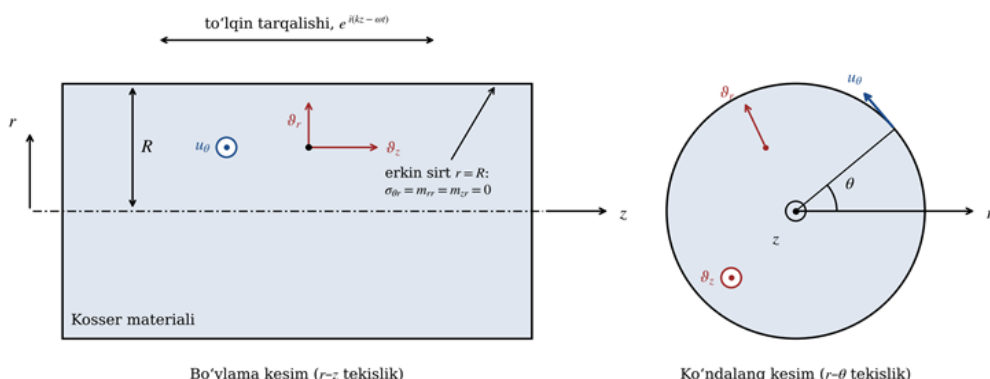
$$\rho \ddot{u} = (\mu_e + \mu_c) \Delta u + (\mu_e - \mu_c + \lambda_e) \nabla(\nabla \cdot u) + 2\mu_c \nabla \times \vartheta \quad (1)$$

$$\rho J \ddot{\vartheta} = (g_1 + g_2) \Delta \vartheta + (g_1 - g_2 + g_3) \nabla(\nabla \cdot \vartheta) + 2\mu_c \nabla \times u - 4\mu_c \vartheta \quad (2)$$

Bu yerda Δ — Laplas operatori, $\nabla \times$ — rotor, nuqtalar vaqt bo'yicha hosilani bildiradi. $\vartheta = 1/2 \nabla \times u$ (qattiq burilish) bo'lganda (1) tenglamada μ_c ni o'z ichiga olgan hadlar o'zaro qisqaradi va klassik Lamé–Navier tenglamalari hosil bo'ladi; $\mu_c \rightarrow 0$ da ham u uchun xuddi shu tenglamalar tiklanadi.

ϑ ga bog'liq bo'lmagan quyidagi maydonlarni qaraymiz (1-rasm):

$$u = u_\theta(r, z, t) e_\theta, \quad \vartheta = \vartheta_r(r, z, t) e_r + \vartheta_z(r, z, t) e_z \quad (3)$$



© — rasm tekisligidan kuzatuvchi tomonga yo'nalish

1-rasm. Masalaning geometriyasi: z — to'lqin tarqalish o'qi, R — silindr radiusi, u_θ — tangensial siljish, ϑ_r, ϑ_z — mikroburilish komponentlari; erkin sirt $r=R$ da $\sigma_{\theta r} = m_{rr} = m_{rz} = 0$



Bu maydonlar sinfi (1), (2) tenglamalarga nisbatan yopiq va klassik burovchi to'liqlarning Kossier muhitiga umumlashmasidir. Mikroburilish vektorini potentsiallar orqali ifodalaymiz:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\vartheta} &= \nabla\varphi + \nabla \times (\psi \mathbf{e}_\theta), \\ \vartheta_r &= \partial_r \varphi - \partial_z \psi, \quad \vartheta_z = \partial_z \varphi + \partial_r \psi + \psi/r.\end{aligned}\quad (4)$$

U holda (1), (2) tizim uchta skalyar tenglamaga ajraladi:

$$\rho \ddot{u}_\theta = (\mu_e + \mu_c) \mathcal{L}u_\theta - 2\mu_c \mathcal{L}\psi \quad (5)$$

$$\rho J \ddot{\psi} = (g_1 + g_2) \mathcal{L}\psi + 2\mu_c u_\theta - 4\mu_c \psi \quad (6)$$

$$\rho J \ddot{\varphi} = (2g_1 + g_3) \Delta_s \varphi - 4\mu_c \varphi \quad (7)$$

bu yerda, (5) va (6) o'zaro bog'langan juft, (7) esa "bo'ylama" mikroburilish potentsiali uchun Klein-Gordon tipidagi mustaqil tenglamadir. Chegaraviy shartlarda qatnashuvchi kuchlanishlar quyidagicha (birinchi indeks — yo'nalish, ikkinchisi — normal r bo'lgan sir):

$$\sigma_{\theta r} = (\mu_e + \mu_c) \partial_r u_\theta - (\mu_e - \mu_c) \frac{u_\theta}{r} - 2\mu_c \vartheta_z \quad (8)$$

$$m_{rr} = 2g_1 \partial_r \vartheta_r + g_3 \left(\partial_r \vartheta_r + \frac{\vartheta_r}{r} + \partial_z \vartheta_z \right) \quad (9)$$

$$m_{zr} = (g_1 + g_2) \partial_r \vartheta_z + (g_1 - g_2) \partial_z \vartheta_r \quad (10)$$

Hisoblash tartibi va model parametrlari

Har bir k uchun $D^*(\omega, k)$ zich ω to'rida hisoblandi; ishora o'zgargan oraliqlar Brent usuli bilan aniqlashtirildi (aniqlik 10^{-12} ω). Qutblar oraliq chetlarida $|D^*(\omega, k)| < 10^{-3} \max |D^*|$ sharti bilan chiqarib tashlandi. Argument kvadrati manfiy bo'lganda J_v o'rniga I_v olindi. Asosiy (akustik) tarmoq $0,3 c_T k < \omega < 1,3 c_T k$ oraliqda qidirildi; ω_c dagi chiqarib tashlanadigan ildiz determinantni $(\omega - \omega_c)$ ga bo'lib yo'qotildi. Matritsa elementlari chekli ayirmalar bilan tekshirildi. Uzun to'liq tezligi aniq determinant ildizlaridan $k \rightarrow 0$ da Richardson ekstrapolyatsiyasi bilan alohida hisoblandi.

1-jadvaldagi parametrlar polimer tipidagi material uchun qabul qilingan model qiymatlari bo'lib, ular o'lchanmagan va tajriba ma'lumoti sifatida qaralmasligi kerak. J qiymati $\Omega_c = \omega_c R/c_T = 1,5$ bo'ladigan qilib tanlandi. Natijalar o'lchamsiz $\Omega = \omega R/c_T$ ko'rinishda keltiriladi (1-jadval).

1-jadval

Qabul qilingan model parametrlari ($L_c = 0,2$ mm, $\alpha_1 = 1,5$, $\alpha_2 = 0,4$, $\alpha_3 = -0,9$, $\mu_c = 0,1 \mu_e$)¹

μ_e , GPa	μ_c , MPa	g_1 , N	g_2 , N	g_3 , N	ρ , kg/m ³	J, mm ²	R, mm
2,5	250	150	40	-90	1200	1,6	3

Bunda $c_T = \sqrt{\mu_e/\rho} = 1443,4$ m/s va $\omega_c = 7,22 \cdot 10^5$ rad/s.

TAHLIL VA NATIJALAR

Hajmiy yechim va ildizlarning haqiqiyligi

Maydonlarni $u_\theta, \psi, \varphi \propto \exp[i(kz - \omega t)]$ ko'rinishda qidiramiz (k — o'q bo'ylab to'liq soni, ω — doiraviy chastota). $u_\theta = U Z_1(qr)$, $\psi = \Psi Z_1(qr)$ (Z_v — J_v yoki Y_v Bessel funksiyasi) va $s = q^2 + k^2$ deb olsak, L operatori bu funksiyalarga -s ga ko'paytirish bilan ta'sir qiladi, shuning uchun (5), (6) dan U va Ψ ga nisbatan quyidagi bir jinsli tizim hosil bo'ladi:

$$\begin{bmatrix} (\mu_e + \mu_c)s - \rho\omega^2 & -2\mu_c s \\ -2\mu_c & (g_1 + g_2)s + 4\mu_c - \rho J\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Noldan farqli yechim mavjud bo'lishi uchun tizim determinanti nolga teng bo'lishi kerak; bu ga nisbatan kvadrat tenglamani beradi:

$$\begin{aligned}
 As^2 + Bs + C &= 0, \\
 A &= (\mu_e + \mu_c)(g_1 + g_2), \\
 B &= (\mu_e + \mu_c)(4\mu_c - \rho J \omega^2) - \rho \omega^2(g_1 + g_2) - 4\mu_c^2, \\
 C &= -\rho \omega^2(4\mu_c - \rho J \omega^2).
 \end{aligned} \quad (12)$$

Mos yechim $\Psi = 2\mu_c$, $U = (g_1 + g_2)s + 4\mu_c - \rho J \omega^2$ ko'rinishda normallanadi. Uchinchi moda (7) dan topiladi:

$$q_3^2 + k^2 = \frac{\rho J \omega^2 - 4\mu_c}{2g_1 + g_3} \quad (13)$$

Lemma (ildizlarning haqiqiyligi). Agar $\mu_e + \mu_c > 0$, $g_1 + g_2 > 0$, $\rho > 0$, $\mu_c \neq 0$ bo'lsa, (12) tenglamaning diskriminanti har bir $\omega > 0$ da musbat; demak, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ va $s_1 < \rho \omega^2 / (\mu_e + \mu_c) < s_2$.

Isbot. (12) tenglamaning chap tomoni quyidagi ko'phadga aynan teng:

$$f(s) = [\Gamma s - \rho \omega^2][as + \beta] - 4\mu_c^2 s$$

bu yerda $\Gamma = \mu_e + \mu_c$, $a = g_1 + g_2$, $\beta = 4\mu_c - \rho J \omega^2$, $s_* = \rho \omega^2 / \Gamma > 0$ bo'lsin. U holda $f(s_*) = -4\mu_c^2$, $s_* < 0$, f ning bosh ko'effitsienti $A = \Gamma a > 0$ bo'lgani uchun esa $f(s) \rightarrow +\infty$ ($s \rightarrow \pm\infty$). s_* nuqtada manfiy, $\pm\infty$ da musbat bo'lgan uzluksiz funksiya s_* ning har ikki tomonida kamida bittadan haqiqiy ildiz3ga ega; kvadrat tenglama bo'lgani uchun ular aynan bittadan. Demak, ikkala ildiz haqiqiy va turlicha *va'ni diskriminant nat'iy* musbat.

$r=0$ da regulyarlik Y_v ni chiqarib tashlaydi. $q_n = \sqrt{s_n - k^2}$ ($n = 1, 2$) bo'lganda to'la silindrdagi umumiy yechim (umumiy ko'paytuvchi $\exp[i(kz - \omega t)]$ tushirib qoldirilgan):

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= \sum_{n=1}^2 c_n U_n J_1(q_n r), \\
 \vartheta_r &= -ik \Psi \sum_{n=1}^2 c_n J_1(q_n r) - c_3 q_3 J_1(q_3 r), \\
 \vartheta_z &= \Psi \sum_{n=1}^2 c_n q_n J_0(q_n r) + ik c_3 J_0(q_3 r),
 \end{aligned} \quad (14)$$

bunda c_1, c_2, c_3 — ixtiyoriy doimiylar, $\Psi = 2\mu_c$, $U_n = (g_1 + g_2) s_n + 4\mu_c - \rho J \omega^2$. Argument kvadrati manfiy bo'lganda ($s_n < k^2$ yoki $q_3^2 < 0$) $J_v(qr)$ o'rniga $I_v(|q|r)$ olinadi (ixtiyoriy doimiy ko'paytuvchi aniqligida).

Chegaraviy shartlar va chastota tenglamasi

$r=R$ yon sirt kuch va moment yuklamalaridan holi:

$$\sigma_{\theta r} = 0, \quad m_{rr} = 0, \quad m_{zr} = 0 \quad (r = R) \quad (15)$$

(14) yechimni (8)–(10) ga qo'ysak, c_1, c_2, c_3 uchun bir jinsli 3×3 tizim hosil bo'ladi; uning elementlari (F, M, N — mos ravishda $\sigma_{\theta r}, m_{rr}, m_{zr}$ ga hissalar):

$$\begin{aligned}
 F_n &= [(\mu_e + \mu_c)U_n - 2\mu_c \Psi] q_n J_0(q_n R) - \frac{2\mu_e U_n}{R} J_1(q_n R), \\
 M_n &= 2g_1 ik \Psi \left[\frac{J_1(q_n R)}{R} - q_n J_0(q_n R) \right], \\
 N_n &= \Psi [(g_1 - g_2)k^2 - (g_1 + g_2)q_n^2] J_1(q_n R), \quad n = 1, 2, \\
 F_3 &= -2\mu_c ik J_0(q_3 R), \\
 M_3 &= -[(2g_1 + g_3)q_3^2 + g_3 k^2] J_0(q_3 R) + \frac{2g_1 q_3}{R} J_1(q_3 R), \\
 N_3 &= -2g_1 ik q_3 J_1(q_3 R).
 \end{aligned} \quad (16)$$

Chastota tenglamasi:

$$\mathcal{D}(\omega, k) \equiv \det \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$



(16) dagi F_n, M_n, N_n ($n=1,2$) elementlari q_n ga nisbatan toq. $n=1,2$ ustunlarni q_n ga, uchinchi ustunni ik ga va ikkinchi satrni ik ga bo'lsak, determinant $D'=-D/(k^2 q_1 q_2)$ ga o'tadi; u q_1^2, q_2^2 , bo'yicha juft va haqiqiydir. $s_1 < s_2$ tartibida va Lemmaga ko'ra ildizlar oddiy bo'lgani uchun $D' - (\omega, k)$ ning haqiqiy analitik funksiyasi, uning ildizlari esa ishora o'zgarishidan topiladi. Ikki holat alohida hisobga olindi: (a) $\omega_c = \sqrt{4\mu_c/(\rho J)}$ dagi chiqarib tashlanadigan ildiz — bunda $s=0$ ildiz bo'ladi va $U=0$ bo'lgani uchun hajmiy yechim bazisi buziladi; $D'/(\omega - \omega_c)$ esa noldan farqli chekli limitga intiladi, ya'ni bu ildiz to'lqinga mos kelmaydi; (b) $q_n=0$ dagi ildizlar — ular aynan nolga teng xos funksiyalarga mos keladi.

Uzun to'lqin limiti va kesim chastotalari

$k \rightarrow 0$ da asosiy tarmoq $\omega = c_0 k + O(k^3)$ ko'rinishda bo'ladi, bunda $c_0^2 = K/I$; K — burash qattiqligi, I — uzunlik birligiga to'g'ri keladigan aylanma inersiya. K ni solishtirma burilish (birlik uzunlikka to'g'ri keladigan burilish burchagi) $\tau = \partial_z (u_\theta/r)$ bo'lgan statik buralish masalasidan topamiz. Bu masalada $u_\theta = \tau z r$, $\vartheta_z = \tau z$, $\vartheta_r = -\tau r/2$ qattiq aylanish maydoni tenglamalarni aniq qanoatlantiradi va $\sigma_{\theta r} = 0$ beradi, ammo $r=R$ da $m_{rr} = -g_1 \tau \neq 0$. Shuning uchun maydon (7) tenglamaning $\omega = k=0$ dagi $\varphi = \Phi_0 I_0(kr)$ yechimi bilan to'ldiriladi:

$$\vartheta_r = -\frac{\tau r}{2} + \kappa \Phi_0 I_1(kr), \quad \kappa = \sqrt{\frac{4\mu_c}{2g_1 + g_3}} \quad (18)$$

bunda I_ν — modifikatsiyalangan Bessel funksiyasi. $m_{rr}(R)=0$ sharti ($\xi = \kappa R$, $\tau=1$ da) quyidagini beradi:

$$\Phi_0 = \frac{g_1}{4\mu_c \left[I_0(\xi) - \frac{2g_1}{(2g_1 + g_3)\xi} I_1(\xi) \right]} \quad (19)$$

Burovchi moment $T = \int_S (r\sigma_{\theta z} + m_{zz}) dS$ (S — ko'ndalang kesim) ning solishtirma burilishga nisbati samarali burash qattiqligini beradi: $K = T/\tau$. z ga normal sirtidagi kuchlanishlar $\sigma_{\theta z} = (\mu_e + \mu_c) \partial_z u_\theta + 2\mu_c \vartheta_r$ va $m_{zz} = 2g_1 \partial_z \vartheta_z + g_3 \nabla \cdot \vartheta$ bo'lib, (18) maydonda ular

$$\sigma_{\theta z} = \mu_e \tau r + 2\mu_c \kappa \Phi_0 I_1(kr), \quad m_{zz} = 2g_1 \tau + g_3 \kappa^2 \Phi_0 I_0(kr)$$

ko'rinishni oladi. $\int_0^R r^2 I_1(kr) dr = R^2 I_2(\xi)/\kappa$ va $\int_0^R r I_0(kr) dr = R I_1(\xi)/\kappa$ tengliklardan foydalanib integrallasak ($\tau=1$):

$$K = 2\pi \left[\frac{\mu_e R^4}{4} + g_1 R^2 + 2\mu_c \Phi_0 R^2 I_2(\xi) + g_3 \Phi_0 \xi I_1(\xi) \right] \quad (21)$$

Birinchi had klassik qattiqlik $K_{cl} = \pi \mu_e R^4/2$ ni beradi; $2\pi g_1 R^2$ — sof moment kuchlanish hissasi (uning klassik hadga nisbati R^2 ga proporsional, shu sababli o'lcham effekti yuzaga keladi), oxirgi ikki had esa chegaraviy qatlam tuzatmasi.

Uzun to'lqinlarda $\Theta(z, t)$ burilish burchagi $K \partial_z^2 \Theta = I \partial_t^2 \Theta$ tenglamani qanoatlantiradi. $u_\theta = r\Theta$ siljish maydoni I ga $\rho \pi R^4/2$ hissa qo'shadi, $\vartheta_z = \Theta$ mikroburilish esa $\rho J \pi R^2$ hissa qo'shadi (radial mikroburilish $O(k)$ marta kichik). Demak, $I = \rho \pi (R^4/2 + J R^2)$ va

$$\begin{aligned} c_0^2 &= \frac{K}{\rho \pi (R^4/2 + J R^2)}, \\ \frac{c_0^2}{c_T^2} &= \frac{K/K_{cl}}{1 + 2J/R^2}, \quad c_T = \sqrt{\mu_e/\rho}. \end{aligned} \quad (22)$$

$k=0$ da M_1, M_2, F_3, N_3 elementlari nolga teng (ular k ga proporsional), shuning uchun $D = -M_3 (F_1 N_2 - F_2 N_1)$ va kesim chastotalari ikki mustaqil qismga ajraladi. A qism (φ -moda):

$$\begin{aligned} (2g_1 + g_3) x J_0(x) &= 2g_1 J_1(x), \quad x = q_3 R, \\ \omega^2 &= \frac{4\mu_c + (2g_1 + g_3) x^2/R^2}{\rho J}. \end{aligned} \quad (23)$$

B qism (burovchi juft):

$$(F_1 N_2 - F_2 N_1)_{k=0} = 0 \quad (24)$$

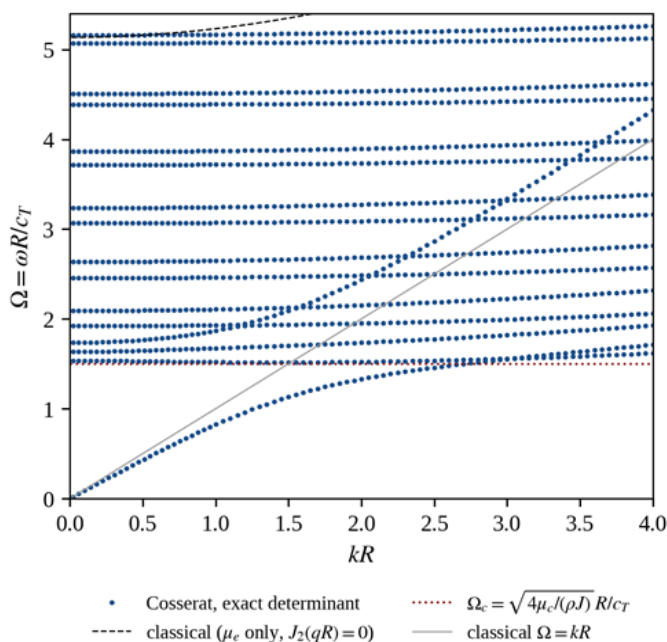
B qism — klassik kesim chastotalari $J_2(qR)=0$ tenglamasining Kosser analogi (bu tenglamaga $\mu_c g_i \rightarrow 0$ da o'tish sonli tasdiqlanmagan, qarang: Cheklovlar). $\omega = \omega_c$ ildizi chiqarib tashlanadi.

Hajmiy ildizlar

1-jadval parametrlarida Lemmaning shartlari bajariladi ($\mu_e + \mu_c = 2,75$ GPa > 0 , $g_1 + g_2 = 190$ N > 0 , $2g_1 + g_3 = 210$ N); diskriminantning musbatligi qo'shimcha ravishda $\omega \in [10^{-2}, 10^2]$ ω_0 ($\omega_0 = c_T/R$) oralig'ida 400 nuqtada tekshirildi, buzilish topilmadi.

Dispersiya spektri

2-rasmda aniq determinant ildizlari ko'rsatilgan (1582 nuqta). Eng pastki tarmoq koordinata boshidan $c_0/c_T = 0,8745$ qiyalik bilan chiqadi, ya'ni klassik $\Omega = kR$ to'g'ri chizig'idan pastda joylashadi. Uning ustida deyarli gorizontall ko'plab tarmoqlar joylashgan; ularning $k \rightarrow 0$ dagi qiymatlari kesim chastotalaridir. Akustik tarmoq $\Omega_c = 1,5$ sathidan $kR \approx 2,7$ atrofida hech qanday o'zgarishsiz o'tadi (2-rasm).



2-rasm. Kosser silindrning dispersiya spektri: $\Omega = \omega R/c_T$ ning kR ga bog'liqligi ($R=3$ mm). Nuqtalar — aniq determinant (17) ildizlari; punktir — klassik buruvchi $J_2(qR)=0$ tenglamasi; kulrang chiziq — klassik $\Omega = kR$; nuqtali chiziq — Ω_c (chiqarib tashlanadigan ildiz)

Uzun to'lqin tezligi va o'lcham effekti

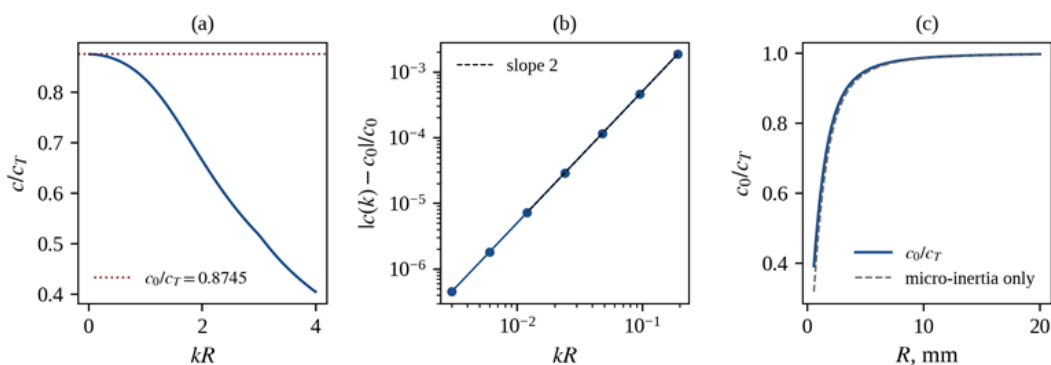
$R=3$ mm uchun $K/K_{cl}=1,0367$ (moment kuchlanishlar qattqlikni 3,7% oshiradi), $1+2J/R^2=1,3556$ (mikroinersiya 35,6% qo'shadi) va $c_0/c_T = \sqrt{1,0367/1,3556} = 0,8745$. 2-jadvalda (22) formula aniq

determinant limiti bilan solishtirilgan: nisbiy farq barcha radiuslarda $3 \cdot 10^{-10}$ dan kichik. 3b-rasmda $|c(k)-c_0|/c_0=O(k^2)$ ekani ko'rinadi (og'ma 2,00). 3c-rasm radiusga bog'liqlikni ko'rsatadi: c_0/c_T $R=1,5$ mm da 0,683, $R=8$ mm da 0,979 (2-jadavl).

2-jadval

Uzun to'lqin tezligi : (22) formula va aniq determinant limiti

R, mm	(22) formula	aniq determinant	nisbiy farq
1,5	0,68296	0,68296	$-1,2 \cdot 10^{-10}$
2	0,77386	0,77386	$-9,9 \cdot 10^{-11}$
3	0,87450	0,87450	$-5,4 \cdot 10^{-11}$
5	0,94799	0,94799	$-2,3 \cdot 10^{-10}$
8	0,97856	0,97856	$2,8 \cdot 10^{-10}$



3-rasm. (a) Asosiy tarmoq c/c_T va uzun to'liqin tezligi $c_0/c_T=0,8745$. (b) $|c(k)-c_0|/c_0$ ning yaqinlashishi (log-log), og'ma 2. (c) O'lcham effekti: (22) formula (tutash chiziq) va faqat mikroinersiya holi $(1+2J/R^2)^{-1/2}$ (punktir).

Kesim chastotalari

3-jadvalda A va B qismlarning dastlabki kesim chastotalari berilgan. Ikkala qism birlashmasi $kR=0,005$ dagi aniq determinant ildizlarini takrorlaydi: aniq ildizlar 738 981; 785 999; 835 785; 924 927; 1 005 689; 1 181 456 rad/s, (23), (24) dan esa 738 981; 785 998; 835 784; 924 927; 1 005 689; 1 181 455 rad/s. Nisbiy farq $2 \cdot 10^{-6}$ dan oshmaydi va k ning chekli qiymati ($kR=0,005$) bilan izohlanadi. Eng quyi ildiz (2104 rad/s) akustik tarmoqqa tegishli. Barcha kesim chastotalari $\Omega_c=1,5$ dan yuqorida yotadi (3-jadval).

3-jadval

Kesim chastotalari $\Omega=\omega R/c_T$ ($R=3$ mm); $\Omega_c=1,5$ chiqarib tashlangan

Qism	1	2	3	4	5	6
A qism, (23)	1,5359	1,9224	2,4556	3,0657	3,7153	4,3868
B qism, (24)	1,6337	1,7371	2,0903	2,6361	3,2352	3,8627

Burovchi to'liqin tezligiga Kosser hissasi ikki qarama-qarshi masshtab effektining nisbati bilan aniqlanadi: moment kuchlanishlar tufayli qotish ($\sim g_1/(\mu_e R^2)$) va mikroinersiya ($\sim J/R^2$). Qabul qilingan parametrlarda ikkinchisi ustun, shuning uchun $c_0 < c_T$, radius ortishi bilan esa $c_0 \rightarrow c_T$. Boshqa materiallarda sof ta'sir ishorasi teskari bo'lishi mumkin, shuning uchun formulani g_1, g_3, J ning mustaqil aniqlangan qiymatlari bilan qo'llash kerak. Shu ma'noda (22) teskari masala uchun foydali bo'lishi mumkin: bir necha radiusli sterjenlarda $c_0(R)$ ni o'lchab, K/K_c va J ni nazariy jihatdan ajratish mumkin.

Yassi tarmoqlarda mikroburilish erkinlik darajalari ustun, guruh tezligi kichik. Faqat eng pastki tarmoq sterjen tipidagi to'liqin bo'lib, uning tezligini burash qattiqligi (21) va aylanma inersiya belgilaydi. ω_c — bir jinsli (gradiyentsiz) mikroburilishning xususiy chastotasi; unda determinantning ildizi olib tashlanadi va akustik tarmoq bu sathdan silliq o'tadi. 3a-rasmida $kR \approx 3$ atrofida kichik egilish bor: u, ehtimol, akustik tarmoq yaqin joylashgan boshqa tarmoq bilan to'qnashganda ildizlarning qayta tartiblanishidan kelib chiqadi (bu talqin alohida tekshirilmagan).

Cheklovlar

(i) Chastota tenglamasi faqat o'qqa simmetrik burovchi tipdagi to'liqinlar uchun yozilgan; bo'ylama va egilish tipidagi to'liqinlar ham mikroburilish bilan bog'langan, ammo bu maqolada ko'rilmagan. (ii) Sonli qiymatlar qabul qilingan model parametrlariga tegishli; haqiqiy material uchun g_i va J tajribada aniqlanishi kerak. (iii) Formulaning tajriba bilan solishtirilishi bajarilmagan. (iv) Kosser doimiylari nolga intilganda determinant ildizlarini klassik Pochhammer spektri bilan solishtirishga urinildi, biroq $\omega_c \rightarrow 0$ da mikroburilish modalari zich to'planib, klassik ildizlarni ajratib bo'lmadi; shu sababli klassik limit sonli tasdiq sifatida keltirilmaydi.

XULOSA VA TAKLIFLAR

Ishda chiziqli izotrop Kosser materialidan yasalgan doiraviy silindrda o'qqa simmetrik burovchi tipdagi to'liqinlar tadqiq etildi. Asosiy natijalar:

— erkin Kosser silindrda burovchi tipdagi to'liqinlar uchun aniq 3×3 chastota tenglamasi (17) olindi; hajmiy ildizlar $s_{1,2}$ barcha $\omega > 0$ da haqiqiy ekani Lemmada isbotlandi, ω_c dagi soxta ildiz va $q_n=0$ dagi ildizlar aniqlanib chiqarib tashlandi;

— chegaraviy qatlamli aniq statik buralish yechimidan c_0 uchun (22) yopiq formula chiqarildi; qabul qilingan

parametrlarda ($R=3 \text{ mm}$) $c_0/c_T=0,8745$, formula aniq determinant bilan $3 \cdot 10^{-10}$ dan yaxshi mos keladi;

— kesim chastotalari aniq (23), (24) tenglamalarga ega ikki mustaqil qismga ajraladi; ularning birlashmasi aniq determinant ildizlarini nisbiy farq $2 \cdot 10^{-6}$ dan oshmaydigan aniqlikda takrorlaydi.

Natijalar Kossier sterjenlarda burovchi to'liqlar tezligini radius bo'yicha baholash va mikrostruktura doimiylarini to'liq o'lchovlaridan aniqlash uchun asos bo'ladi. Keyingi tadqiqotlarda bo'ylama va egilish tipidagi to'liqlarni hisobga olish hamda formulani tajriba ma'lumotlari bilan solishtirish ko'zda tutiladi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et Fils, 1909.
2. Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids*. New York: Springer, 1999.
3. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986.
4. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11, No. 1. P. 385–414. DOI: 10.1007/BF00253945.
5. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11, No. 1. P. 415–448. DOI: 10.1007/BF00253946.
6. Achenbach J.D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North-Holland, 1973.
7. Graff K.F. *Wave Motion in Elastic Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
8. Willson A.J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1972. Vol. 10, No. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
9. Krishna Reddy G.V., Venkatasubramanian N.K. Saint-Venant's problem for a micropolar elastic circular cylinder // *International Journal of Engineering Science*. 1976. Vol. 14, No. 11. P. 1047–1057. DOI: 10.1016/0020-7225(76)90099-9.
10. Khudoynazarov K., Yalgashev B.F., Mavlonov T. Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. Vol. 1030. Art. 012098. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098.
11. Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F., Akhatov Kh.N. Refined equations of torsional vibrations of a three-layer cylindrical viscoelastic shell // *AIP Conference Proceedings*. 2022. Vol. 2637. Art. 030026. DOI: 10.1063/5.0121480.
12. Khudoynazarov Kh. Longitudinal-radial vibrations of a viscoelastic cylindrical three-layer structure // *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2024. Vol. 22. P. 473. DOI: 10.22190/FUME231219010K.
13. Ruziyev T., Safarov I.I., Teshayev M.Kh. et al. Longitudinal-transverse natural waves in a cylindrical shell in contact with a viscous fluid // *Journal of Composites Science*. 2026. Vol. 10, No. 3. Art. 121. DOI: 10.3390/jcs10030121.
14. Ruziyev T., Safarov I.I., Teshayev M.Kh., Boltayev Z.I. et al. Assessment of the dissipative properties of viscoelastic hollow cylindrical bodies with filler during the propagation of natural waves // *Journal of Composites Science*. 2026. Vol. 10, No. 8. Art. 437. DOI: 10.3390/jcs10080437.

muhandislik **& iqtisodiyot**

ijtimoiy-iqtisodiy, innovatsion texnik,
fan va ta'limga oid ilmiy-amaliy jurnal

Ingliz tili muharriri: Feruz Hakimov

Musahhih: Zokir Alibekov

Sahifalovchi va dizayner: Abdurahmon Qurbonov

2026. № 10

© Materiallar ko'chirib bosilganda "Muhandislik va iqtisodiyot" jurnali manba sifatida ko'rsatilishi shart. Jurnalda bosilgan material va reklamalardagi dalillarning aniqligiga mualliflar ma'sul. Tahririyat fikri har vaqt ham mualliflar fikriga mos kelamasligi mumkin. Tahririyatga yuborilgan materiallar qaytarilmaydi.

"Muhandislik va iqtisodiyot" jurnali 26.06.2023-yildan
O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Adminstratsiyasi huzuridagi
Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan
№S-5669245 reyestr raqami tartibi bo'yicha ro'yxatdan o'tkazilgan.
Litsenziya raqami: №095310.

**Manzilimiz: Toshkent shahri Yunusobod
tumani 15-mavze 19-uy**





+998 93 718 40 07



<https://muhandislik-iqtisodiyot.uz/index.php/journal>



t.me/yait_2100