

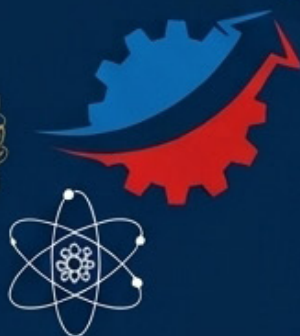
MUHANDISLIK

& IQTISODIYOT

*ijtimoiy-igʻtisodiy, innovatsion texnik,
fan va taʼlimga oid ilmiy-amaliy jurnal*

2026-YIL

SENTYABR / 9-SON, II-QISM



Milliy nashrlar

OAK: <https://oak.us/pages/4802>

05.00.00 – Texnika fanlari

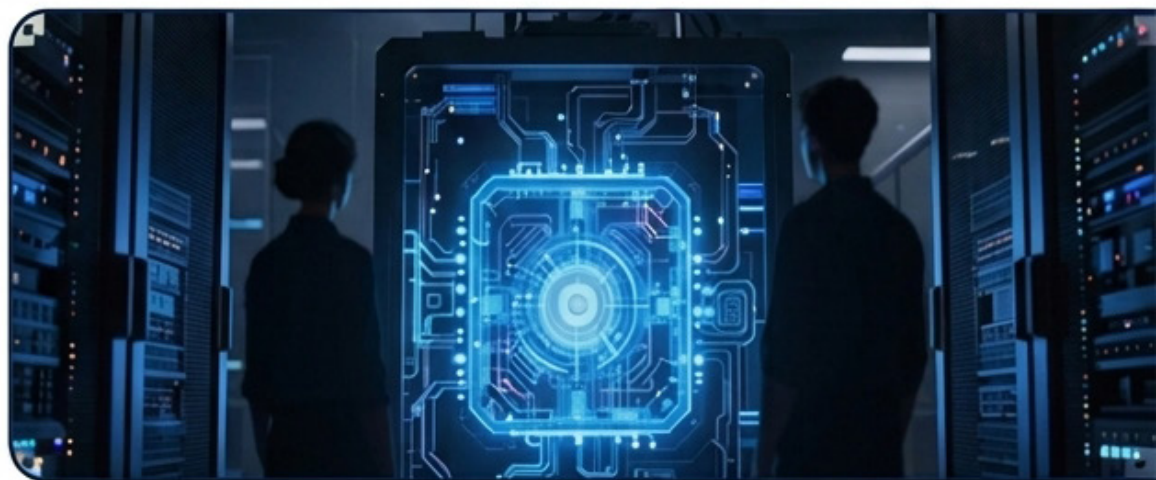
08.00.00 – Iqtisodiyot fanlar



Google
Scholar

ISSN
INTERNATIONAL
STANDARD
SERIAL
NUMBER
INTERNATIONAL CENTRE

OpenAIRE



ISSN: 3060-463X

РЭУ.РФ
ИМЕНЕЕ F.R. RREKANOBA
PHEENR ISL. FADISEIOBA



muhandislik & iqtisodiyot

ijtimoiy-iqtisodiy, innovatsion texnik,
fan va ta'limga oid ilmiy-amaliy jurnal

Elektron nashr, 2026-yil, sentyabr.

Bosh muharrir:

Zokirova Nodira Kalandarovna, iqtisodiyot fanlari doktori, DSc, professor

Bosh muharrir o'rinbosari:

Shakarov Zafar G'afarovich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori, PhD, dotsent

Tahrir hay'ati:

Abduraxmanov Kalendar Xodjayevich, O'z FA akademigi, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Sharipov Kongratbay Avezimbetovich, texnika fanlari doktori, professor

Maxkamov Baxtiyor Shuxratovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Abduraxmanova Gulnora Kalandarovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Shaumarov Said Sanatovich, texnika fanlari doktori, professor

Turayev Bahodir Xatamovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Nasimov Dilmurod Abdulloyevich, iqtisodiyot fanlari doktori (DSc), professor

Allayeva Gulchexra Jalgasovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Arabov Nurali Uralovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Maxmudov Odiljon Xolmirzayevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Xamrayeva Sayyora Nasimovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bobonazarova Jamila Xolmurodovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Irmatova Aziza Baxromovna, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bo'taboyev Mahammadjon To'ychiyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Shamshiyeva Nargizaxon Nosirxuja kizi, iqtisodiyot fanlari doktori, professor,

Xolmuxamedov Muhsinjon Murodullayevich, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Xodjayeva Nodiraxon Abdurashidovna, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Amanov Otabek Amankulovich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Toxirov Jaloliddin Ochil o'g'li, texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Qurbonov Samandar Pulatovich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Zikriyoyev Aziz Sadulloyevich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Tabayev Azamat Zaripbayevich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Sxay Lana Aleksandrovna, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Ismoilova Gulnora Fayzullayevna, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Djumaniyazov Umrbek Ilxamovich, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Kasimova Nargiza Sabitdjanovna, iqtisodiyot fanlari nomzodi, dotsent

Kalanova Moxigul Baxritdinovna, dotsent

Ashurzoda Luiza Muxtarovna, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Sharipov Sardor Begmaxmat o'g'li, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Tursunov Ulug'bek Sativoldiyevich, iqtisodiyot fanlari doktori (DSc), dotsent

Bauyetdinov Majit Janizaqovich, Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti dotsenti, PhD

Botirov Bozorbek Musurmon o'g'li, Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Sultonov Shavkatjon Abdullayevich, Kimyo fanlari doktori, (DSc)

Jo'raeva Malohat Muhammadovna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor.

Yusupov Maxamadamin Abduxamidovich, iqtisodiyot fanlari nomzodi (DSc), professor

Kalonova Moxigul Baxritdinovna, iqtisodiyot fanlari nomzodi (PhD), dotsent

Mirzayev Kulmamat Djanzakovich, iqtisodiyot fanlari nomzodi (DSc), professor.

Karimova Nilufar Sadirdin qizi, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Norboyev Odil Abrayevich, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Karimova Nilufar Sadirdin qizi, iqtisodiyot fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Pardaev Umidjon Uralovich, iqtisodiyot fanlari doktori (DSc), professor

Xolmirzayev Ulug'bek Abdulazizovich, Iqtisodiyot fanlari doktori (DSc)

muhandislik & iqtisodiyot

ijtimoiy-iqtisodiy, innovatsion texnik,
fan va ta'limga oid ilmiy-amaliy jurnal

- 05.01.00 – Axborot texnologiyalari, boshqaruv va kompyuter grafikasi
- 05.01.01 – Muhandislik geometriyasi va kompyuter grafikasi. Audio va video texnologiyalari
- 05.01.02 – Tizimli tahlil, boshqaruv va axborotni qayta ishlash
- 05.01.03 – Informatikaning nazariy asoslari
- 05.01.04 – Hisoblash mashinalari, majmualari va kompyuter tarmoqlarining matematik va dasturiy ta'minoti
- 05.01.05 – Axborotlarni himoyalash usullari va tizimlari. Axborot xavfsizligi
- 05.01.06 – Hisoblash texnikasi va boshqaruv tizimlarining elementlari va qurilmalari
- 05.01.07 – Matematik modellash
- 05.01.11 – Raqamli texnologiyalar va sun'iy intellekt
- 05.02.00 – Mashinasozlik va mashinashunoslik
- 05.02.08 – Yer usti majmualari va uchish apparatlari
- 05.03.02 – Metrologiya va metrologiya ta'minoti
- 05.04.01 – Telekommunikatsiya va kompyuter tizimlari, telekommunikatsiya tarmoqlari va qurilmalari. Axborotlarni taqsimlash
- 05.05.03 – Yorug'lik texnikasi. Maxsus yoritish texnologiyasi
- 05.05.05 – Issiqlik texnikasining nazariy asoslari
- 05.05.06 – Qayta tiklanadigan energiya turlari asosidagi energiya qurilmalari
- 05.06.01 – To'qimachilik va yengil sanoat ishlab chiqarishlari materialshunosligi
- 05.08.03 – Temir yo'l transportini ishlatish
- 05.08.06 – "G'ildirakli va gusenisali mashinalar va ularni ishlatish" (texnika fanlari)
- 05.09.01 – Qurilish konstruksiyalari, bino va inshootlar
- 05.09.04 – Suv ta'minoti. Kanalizatsiya. Suv havzalarini muhofazalovchi qurilish tizimlari
- 10.00.06 – Qiyosiy adabiyotshunoslik, chog'ishtirma tilshunoslik va tarjimashunoslik
- 10.00.04 – Yevropa, Amerika va Avstraliya xalqlari tili va adabiyoti
- 08.00.01 – Iqtisodiyot nazariyasi
- 08.00.02 – Makroiqtisodiyot
- 08.00.03 – Sanoat iqtisodiyoti
- 08.00.04 – Qishloq xo'jaligi iqtisodiyoti
- 08.00.05 – Xizmat ko'rsatish tarmoqlari iqtisodiyoti
- 08.00.06 – Ekonometrika va statistika
- 08.00.07 – Moliya, pul muomalasi va kredit
- 08.00.08 – Buxgalteriya hisobi, iqtisodiy tahlil va audit
- 08.00.09 – Jahon iqtisodiyoti
- 08.00.10 – Demografiya. Mehnat iqtisodiyoti
- 08.00.11 – Marketing
- 08.00.12 – Mintaqaviy iqtisodiyot
- 08.00.13 – Menejment
- 08.00.14 – Iqtisodiyotda axborot tizimlari va texnologiyalari
- 08.00.15 – Tadbirkorlik va kichik biznes iqtisodiyoti
- 08.00.16 – Raqamli iqtisodiyot va xalqaro raqamli integratsiya
- 08.00.17 – Turizm va mehmonxona faoliyati

Ma'lumot uchun, OAK

Rayosatining 2024-yil 28-avgustdagi 360/5-son qarori bilan "Dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro'yxati"ga texnika va iqtisodiyot fanlari bo'yicha "Muhandislik va iqtisodiyot" jurnali ro'yxatga kiritilgan.

Muassis: "Tadbirkor va ishbilarmon" MChJ

Hamkorlarimiz:

1. Toshkent shahridagi G.V.Plexanov nomidagi Rossiya iqtisodiyot universiteti
2. Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti
3. Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligini mexanizatsiyalash muhandislari instituti" milliy tadqiqot universiteti
4. Islom Karimov nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti
5. Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
6. Toshkent davlat transport universiteti
7. Toshkent arxitektura-qurilish universiteti
8. Toshkent kimyo-texnologiya universiteti
9. Jizzax politexnika instituti



MUNDARIJA

O'ZBEKISTON TIJORAT BANKLARIDA KREDIT RISKINI ERTA ANIQLASH TIZIMINI SUN'IY INTELLEKT ASOSIDA TAKOMILLASHTIRISH.....	9
Kobilova Ozoda Abdishukur qizi	
BUYUK BRITANIYA STARTAP EKOTIZIMINI BOSHQARISH MODEL VA O'ZBEKISTON UCHUN SABOQLAR.....	15
Sodiqov Elmurod Shomurod o'g'li	
ФИНАНСОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ АГРОБИЗНЕСА, РЕФОРМА ИНСТИТУТА НЕПЛАТЁЖЕСПОСОБНОСТИ И ГЕОГРАФИЯ СЕЛЬСКОЙ БЕДНОСТИ: УЗБЕКИСТАН, 2015–2025 ГОДЫ.....	21
Адилов Шерзот Шамильевич	
AHOLI DAROMADLARI VA ISTE'MOL XARAJATLARINI TADQIQ ETISHNING ZAMONAVIY EKONOMETRIK YONDASHUVLARI	30
Farmonov Dilshod Po'latovich	
SUN'IY INTELLEKT TRANSFORMATSIYASI SHAROITIDA INSON KAPITALIGA QO'YILADIGAN KOMPETENSIYAVIY TALABLARNING O'ZGARISHI: XALQARO TENDENSIYALAR VA O'ZBEKISTON UCHUN USTUVOR YO'NALISHLAR	36
Durdona Davletova	
KICHIK BIZNES SOHASIDA INSON KAPITALINI RIVOJLANTIRISH VA MEHNAT MUNOSABATLARINI TARTIBGA SOLISH OMILLARI, USULLARI HAMDA FUNKSIYALARI	56
Ulug'muradova Nodira Berdimuradovna	
O'ZBEKISTONDA YAKKA TARTIBDAGI TADBIRKORLARNI SOLIQQA TORTISHNING AMALDAGI MEKANIZMI.....	61
Erxanov Muxammadjon Absayitovich	
BOSHQARUV TIZIMIDA IQTISODIY SAMARADORLIKNI OSHIRISHNING ZAMONAVIY MEKANIZMLARI.....	68
Safarov Shohboz Vahob o'g'li	
EVALUATION OF THE PHYTOREMEDIATION POTENTIAL OF AZOLLA CAROLINIANA FOR THE REMOVAL OF TOXIC METALS FROM INDUSTRIAL EFFLUENTS	72
Azimov Shavkat Shuxratovich	
STABLE CEMENT COMPOSITES BASED ON WASTE TIRE RUBBER AND FLY ASH	78
Daminov Oybek, Egamberdiyev Elmurod, Xoliqulov Odiljon	
KICHIK BIZNES VA XUSUSIY TADBIRKORLIK SUBYEKTLARIDA ISHLAB CHIQARILGAN MAHSULOTLARNING EKSPORT SALOHİYATINI BAHOLASH.....	85
Xikmatullayeva Nargiza Jamoliddin qizi	
CO-LOCATED SMALL MODULAR REACTORS AS AN ALTERNATE AC POWER SOURCE FOR LARGE NUCLEAR UNITS UNDER REGIONAL GRID CASCADING CONDITIONS: A DESIGN-BASIS ASSESSMENT FOR UZBEKISTAN	90
Turaeva Dilnavoz	
YO'LOVCHI TASHISH TRANSPORTINI BARQAROR IQTISODIYOTGA ULUSHINI EKONOMETRIK MODELASHTIRISH USULLARI.....	96
Dilshod Karimboyev	
СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И АКТУАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ НАЦИОНАЛЬНОЙ МОДЫ НА ТУРИСТИЧЕСКОМ РЫНКЕ УЗБЕКИСТАНА	102
Юсупова Мохинур Фарход кизи	
АДАПТИВНОЕ РАЗВИТИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРЕДПРИЯТИЙ КАК ФАКТОР КАЧЕСТВЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА УЗБЕКИСТАНА В УСЛОВИЯХ ЭНЕРГОПЕРЕХОДА.....	110
Аллаева Гульчехра Жалгасовна	



ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ИНСТРУМЕНТОВ ГОСУДАРСТВЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЕЙ	121
Икрамова Нодира Бурхон кизи XONDIZA KONI POLIMETALL RUDALARINING MINERALOGIK VA TEXNOLOGIK XUSUSIYATLARINI TADQIQ ETISH.....	128
Abdisoatov Sardor, Axmatov Sobir, Eshnazarov Mustafo MALAKALI MUTAXASSISLAR TAYYORLASHDA TA'LIM-INNOVATSION RIVOJLANISHNING MOHIYATI VA UNING NAZARIY ASOSLARI	133
Temirova Shalola Erkinovna BENZIN TARKIBIDAGI KISLOROD MIQDORINI ANIQLASH: TAHLIL USULLARI VA ULARNING AMALIY AHAMIYATI	138
To'xtayev Nozim Nazir o'g'li EKSTRAKSIYA JARAYONI PARAMETRLARINING ERITUVCHILARNING EKSTRAKSION QOBILIYATIGA BOG'LIQLIGI	142
G'aybullayev Saidjon Abdusalimovich THE ROLE OF CHATBOTS IN EDUCATION AND THEIR APPLICATION	150
Hamroyev Bobirjon Bahritdinovich KICHIK BIZNES VA UNING MILLIY IQTISODIYOTNI BARQAROR RIVOJLANISHIDAGI O'RNI.....	156
Xolmirzayev Abdulxamid Xapizovich KO'P QATLAMLI SFERIK QOBIQNING QOVUSHQOQ-ELASTIK MUHITDAGI XOS (ERKIN) TEBRANISHLARI	161
Jalolov Farruh Baxshulloyevich QAYTA TIKLANUVCHI ENERGIYA MANBALARINI ELEKTR ENERGETIKA TIZIMIGA INTEGRATSIYALASH VA ELEKTR TA'MINOTI BARQARORLIGINI OSHIRISH	168
Jafarov Sobir Talab o'g'li SENTINEL-1 PSINSAR TEXNOLOGIYASI ASOSIDA QALMOQQIR OCHIQ KARYERI BORTLARINING DEFORMATSIYASINI SUN'IY YO'LDOSH ORQALI MONITORING QILISH	173
Usmonov Firdavs Ro'zimurod o'g'li O'ZBEKISTONDA DAVLAT XARIDLARINI TASHKIL ETISHNING AMALDAGI MEXANIZMI VA UNI TAKOMILLASHTIRISH YO'NALISHLARI	181
Kurbonbekov Sardorbek Ravshanovich АНАЛИЗ ДИНАМИКИ, СТРУКТУРЫ И ТЕНДЕНЦИЙ РАЗВИТИЯ КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ КОММЕРЧЕСКИХ БАНКОВ УЗБЕКИСТАНА.....	190
Умаров Улугбек Унарович O'ZBEKISTON HUDUDLARIDA IJTIMOY FAROVONLIK VA YASHASH SHAROITLARINI BAHOLASHNING KOMPLEKS YONDASHUVI	197
Jamolov Mirzabek Mirjalil o'g'li RAQAMLI IQTISODIYOT SHAROITIDA KICHIK BIZNES VA XUSUSIY TADBIRKORLIKNI RIVOJLANTIRISHNING USTUVOR YO'NALISHLARI	202
Shokirov Shoxruxmirzo Baxtiyorjon o'g'li O'ZBEKISTONDA AKSIZ SOLIG'I STAVKALARINING BIR XILDA OSHIRILISHINING FISKAL, ISTE'MOL VA TAQSIMLANISHGA TA'SIRI.....	208
Musurmonov Sherzod Yusupovich DEVELOPING A CONCEPTUAL MODEL OF A MARKETING MECHANISM FOR ATTRACTING APPLICANTS	217
Umarov Shuhrat Bahodir o'g'li ELEKTRON SAVDO XIZMATLARINING SOTSIAL-IQTISODIY MAZMUNI VA IQTISODIYOTDA TUTGAN O'RNI	230
Ulugmurodov Farxod Faxriddinovich DISPERS SISTEMALARINING TURLARI VA ULARNINGYO'L BITUMLARINING XOSSALARIGA TA'SIRINI TADQIQ QILISH	235
Abdullayeva Shoxista Shuxratovna, Adizov Bobirjon Zamirovich	



ЦИФРОВИЗАЦИЯ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН: ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ.....	240
Нуруллаева Гулнара Коптлеуовна	
DAVLAT TIBBIYOT TASHKILOTLARIDA MOLIVAVIY HISOBOTLARNING AXBOROT IMKONIYATLARI (EKNOMETRIK MODELLAR ORQALI BAHOLASH)	245
Kuliboyev Azamat Shonazarovich	
MOLIVAVIY SAVODXONLIK VA AHOLINING TADBIRKORLIK FAOLIYATIGA JALB ETILISHINI OSHIRISHNING TASHKILIY-IQTISODIY MEXANIZMLARI	253
Obilov Mirkomil Rashidovich	
IJTIMOIIY TADBIRKORLIKNI DAVLAT TOMONIDAN MOLIVAVIY QO'LLAB-QUVVATLASHNING XORIJIY MODELLARI: QIYOSIIY TAHLIL	260
Yerjanov Shohrux Kabil o'g'li	
DAVLAT SUBSIDIIYALARINI BOSHQARISH JARAYONLARINI RAQAMLASHTIRISH VA XALQARO RAQAMLI INTEGRATSIYA ASOSIDA TAKOMILLASHTIRISH YO'NALISHLARI.....	266
Hasanov To'liqin Axmatovich	
СПЕКТРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ЭКСИТОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ САМОАГРЕГАЦИИ МОЛЕКУЛ РИБОФЛАВИНА	272
Г.К. Касимова	
QAZIB OLINAYOTGAN ENG YIRIK VA RUDA KONLARINING GEODINAMIK SHAROITLARINI TAHLIL QILISH.....	277
Qo'shshayev Uchqun Quvvatovich	
KO'P O'LCHAMLI BESSEL OPERATORLARIGA ASOSLANGAN LAPLAS-BESSEL DIFFERENSIAL OPERATORINING FORMAL O'Z-O'ZIGA QO'SHMALIGI VA BIR JINSLILIK XOSSALARI HAQIDA.....	282
Jo'rayev Shaxzod Shuhratjon o'g'li	

KO'P O'LCHAMLI BESSEL OPERATORLARIGA ASOSLANGAN LAPLAS-BESSEL DIFFERENSIAL OPERATORINING FORMAL O'Z-O'ZIGA QO'SHMALIGI VA BIR JINSLILIK XOSSALARI HAQIDA

Jo'rayev Shaxzod Shuhratjon o'g'li

Osiyo xalqaro universiteti, "Aniq fanlar va raqamli texnologiyalar" kafedrası o'qituvchisi.

Annotatsiya. Mazkur maqolada ko'p o'lchamli Bessel differensial operatoriga asoslangan Laplas-Bessel operatori (Kipriyanov operatori, Δ_B) ko'rib chiqiladi. Operatorning qat'iy ta'rif, uning klassik Laplas operatori bilan bog'liqligi, vaznli Lebeg fazolarida formal o'z-o'ziga qo'shma (self-adjoint) ekanligi va bir jinslilik xossasi to'liq isbotlari bilan keltiriladi. Shuningdek, operatorning umumlashgan siljish operatori bilan bog'liqligi, fundamental yechimi hamda operator asosida qurilgan B-elliptik, B-parabolik va B-giperbolik tenglamalar sinflari haqida umumiy nazariy ma'lumot beriladi.

Kalit so'zlar: Laplas-Bessel operatori, Bessel differensial operatori, umumlashgan siljish operatori, vaznli Lebeg fazosi, B-elliptik tenglamalar, fundamental yechim.

Abstract. This paper considers the Laplace-Bessel operator (Kipriyanov operator, Δ_B) based on the multidimensional Bessel differential operator. A rigorous definition of the operator is given, together with complete proofs of its relation to the classical Laplace operator, its formal self-adjointness in weighted Lebesgue spaces, and its homogeneity property. In addition, the connection of the operator with the generalized translation operator, its fundamental solution, and general theoretical information on the classes of B-elliptic, B-parabolic and B-hyperbolic equations constructed on the basis of this operator are presented.

Keywords: Laplace-Bessel operator, Bessel differential operator, generalized translation operator, weighted Lebesgue space, B-elliptic equations, fundamental solution.

Аннотация. В настоящей статье рассматривается оператор Лапласа-Бесселя (оператор Киприянова, Δ_B), основанный на многомерном дифференциальном операторе Бесселя. Приводится строгое определение оператора, а также полные доказательства его связи с классическим оператором Лапласа, формальной самосопряжённости в весовых пространствах Лебега и свойства однородности. Кроме того, даются общие теоретические сведения о связи оператора с обобщённым оператором сдвига, его фундаментальном решении, а также о классах В-эллиптических, В-параболических и В-гиперболических уравнений, построенных на основе данного оператора.

Ключевые слова: оператор Лапласа-Бесселя, дифференциальный оператор Бесселя, обобщённый оператор сдвига, весовое пространство Лебега, В-эллиптические уравнения, фундаментальное решение.

KIRISH

Klassik Laplas operatori $\Delta = \sum \partial^2 / \partial x^2$ matematik fizikaning eng muhim differensial operatorlaridan biri bo'lib, potentsiallar nazariyasi, issiqlik o'tkazuvchanlik va tebranish tenglamalarining asosini tashkil etadi. Ko'plab amaliy masalalarda - masalan, o'qqa nisbatan simmetrik (aksial-simmetrik) muhitlardagi jarayonlarni o'rganishda - Laplas operatorini silindrik yoki sferik koordinatalarda yozish natijasida bitta yoki bir nechta o'zgaruvchi bo'yicha Bessel differensial operatori paydo bo'ladi:

$$B_\gamma = d^2/dx^2 + (\gamma/x) d/dx, \quad x > 0, \gamma > 0. \quad (1.1)$$

Bu holni umumlashtirish g'oyasi 1950–1970-yillarda B.M. Levitan va I.A. Kipriyanov tomonidan tizimli tarzda rivojlantirildi [2-4]. Kipriyanov (1.1)-operatorni bir nechta o'zgaruvchiga nisbatan qo'llab, klassik Laplas operatorining singular umumlashmasi - Laplas-Bessel operatori (yoki Kipriyanov operatori) Δ_B ni kiritdi va unga asoslangan tenglamalarni B-elliptik, B-parabolik hamda B-giperbolik tenglamalar deb atadi [1]. Hozirgi kunda bu operator ko'pincha "Laplace-Bessel operator" nomi bilan ham yuritiladi [7].



Ushbu operator nazariyasi keyingi yillarda faol rivojlanmoqda: umumlashgan siljish (Delsart-Levitan) operatori vositasida qurilgan garmonik tahlil [3, 4], vaznli Lebeg va Sobolev fazolarida chegaraviy teoremlar [5, 6], hamda operatorning fundamental yechimi [8, 9] kabi yo'nalishlarda muhim natijalar olindi.

Ushbu maqolaning maqsadi - Laplas-Bessel operatorining qat'iy ta'rifini keltirish, uning eng muhim algebrak va analitik xossalarini to'liq isbotlari bilan bayon qilish hamda operator nazariyasining umumiy tuzilishini ko'rsatishdan iborat.

MAVZUGA OID ADABIYOTLAR SHARHI

Ko'p o'lchamli Bessel operatorlari va ular asosida qurilgan Laplas-Bessel differensial operatorlari zamonaviy matematik analizning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Ushbu operatorlar nazariyasi differensial tenglamalar, garmonik analiz, maxsus funksiyalar, integral operatorlar, og'irlikli funksional fazolar va potentsiallar nazariyasi bilan uzviy bog'liq. Adabiyotlarni tahlil qilish shuni ko'rsatadiki, mazkur yo'nalishning rivojlanishida Levitan, Muckenhoupt, Stein, Kipriyanov, Trimèche, Gadjiev, Aliev, Rubin, Guliyev, Bayrakchi va boshqa olimlarning tadqiqotlari muhim o'rin egallaydi.

I.A. Aliev va B. Rubin Laplas-Bessel operatorining garmonik analizdagi xususiyatlarini o'rganishda fundamental natijalar olgan olimlar hisoblanadi. Ularning tadqiqotlarida Laplas-Bessel operatoriga mos sferik garmonikalar nazariyasi ishlab chiqilgan. Mualliflar klassik garmonik analizdagi Plancherel formulasi, Laplas formulasi, Funk-Xekke formulasi, ko'paytma formulasi va qo'shish teoremasining Laplas-Bessel operatoriga mos analoglarini olganlar. Shuningdek, Fourier-Bessel almashtirishining simmetrik xususiyatlari, silliq funksiyalarning dekompozitsiyasi va umumlashgan konvolyutsiya operatorlari tadqiq etilgan. Mazkur natijalar ko'p o'lchamli Bessel operatorlarining spektral va garmonik tabiatini tushunish uchun muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

I.A. Aliev va S.B. Uyhan-Bayrakchi Laplas-Bessel differensial operatori bilan bog'liq Bessel potentsiallarini o'rganishga katta hissa qo'shgan. Ularning 2002-yildagi tadqiqotida Laplas-Bessel operatoriga mos Bessel potentsiallari uchun Balakrishnan-Rubin tipidagi aniq inversiya formulalari olingan. Tadqiqotda B-metagarmonik yarimgruppa kiritilib, uning asosiy xususiyatlari o'rganilgan. Ushbu ish Laplas-Bessel operatorining spektral va integral xususiyatlarini o'rganish, xususan, operatorning funksional fazolardagi ta'sirini aniqlash uchun muhim ahamiyatga ega.

A. Eroglu, M.G. Hajibayov va A. Serbetci Laplas-Bessel operatoriga bog'liq B-fraksion integrallar uchun og'irlikli baholarni o'rgangan. Ularning tadqiqotida B-Riesz potentsiallari uchun ikki og'irlikli tengsizliklar olingan va bu natijalar klassik Riesz potentsiallari nazariyasidagi Heinig natijalarining Laplas-Bessel operatoriga mos analogi sifatida qaralgan. Tadqiqotda kabi og'irlikli Lebeg fazolari qo'llanilgan. Bu esa Laplas-Bessel operatorini o'rganishda operatorning tabiiy og'irlik funksiyasi muhim ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatadi.

S. Sezer, S. Bayrakchi, G. Yildiz va R. Kahraman Laplas-Bessel differensial operatori bilan bog'liq -BMO fazolarini tadqiq qilgan. Mualliflar mazkur fazolarning xarakteristik xususiyatlarini aniqlab, Jon-Nirenberg tipidagi tengsizlikni isbotlaganlar hamda -Puasson integrali bilan -BMO funksiyalari o'rtasidagi bog'lanishni o'rganganlar. Ushbu natijalar Laplas-Bessel operatorining og'irlikli funksional fazolar nazariyasidagi o'rnini yanada mustahkamlaydi.

Shunday qilib, mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, olimlarning asosiy e'tibori Laplas-Bessel operatorining garmonik analiz, potentsiallar nazariyasi, Fourier-Bessel almashtirishlari, og'irlikli Lebeg, Morrey va BMO fazolaridagi xossalariga qaratilgan. Biroq ko'p o'lchamli Bessel operatorlariga asoslangan Laplas-Bessel differensial operatorining formal o'z-o'ziga qo'shmaligi va bir jinslilik xossalarini birgalikda, operatorning tabiiy og'irlik funksiyasi va masshtablash xususiyatlari bilan bog'liq holda tizimli tadqiq etish alohida ilmiy masala sifatida dolzarb bo'lib qolmoqda.

TADQIQOT METODOLOGIYASI

Tadqiqotning asosiy maqsadi - Laplas-Bessel operatorini qat'iy ta'riflash va uning xossalarini isbotlash bo'lgani sababli, ishda klassik matematik analiz va differensial tenglamalar nazariyasining quyidagi analitik usullaridan foydalaniladi: (a) sferik koordinatalarga o'tish va zanjir qoidasi asosida bevosita hisoblash usuli (radial funksiyalar uchun Laplas operatorini Bessel operatoriga keltirishda); (b) vaznli qismlab integrallash usuli, ya'ni B-Grin formulasini keltirib chiqarish uchun qo'llaniladigan vaznli divergensiya-gradient texnikasi; (c) o'zgaruvchilarni masshtablash (skayling) usuli, operatorning bir jinslilik xossasini isbotlash uchun; (d) Furrye-Bessel (Hankel) integral almashtirishi va umumlashgan siljish operatoriga asoslangan usul, bu esa fundamental yechim va Levitan kommutativlik teoremasi kabi chuqurroq natijalarni adabiyotlarga tayangan holda keltirish uchun ishlatiladi. Quyida ushbu usullarni qo'llash uchun zarur bo'lgan asosiy fazolar va belgilashlar keltiriladi.

Butun maqola davomida quyidagi belgilashlardan foydalanamiz. $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ bo'lsin va $R_{k,+}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_1 > 0, \dots, x_k > 0\}$ ko'pxil (yarim fazo) deb belgilanadi. $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, $\gamma_i > 0$ - musbat parametrlar to'plami bo'lsin. $R_{k,+}^n$ da quyidagi vaznli o'lchov kiritiladi:

$$d\mu_\gamma(x) = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_k^{\gamma_k} dx,$$

bu yerda dx - R^n dagi Lebeg o'lchovi.

1-ta'rif. $1 \leq p < \infty$ bo'lsin. $R_{k,+}^n$ da aniqlangan, o'lchovli f funksiya uchun

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}} = \left(\int_{R_{k,+}^n} |f(x)|^p d\mu_\gamma(x) \right)^{1/p}$$

chekli bo'lsa, $f \in L_{p,\gamma}(R_{k,+}^n)$ deymiz. $L_{p,\gamma}(R_{k,+}^n)$ - vaznli Lebeg fazosi deyiladi.

$C^\infty(R_{k,+}^n)$ orqali $R_{k,+}^n$ da barcha tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan va $x_1, \dots, x_k$ o'zgaruvchilar bo'yicha juft (ya'ni $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, \dots, k$, $x_i = 0$ da nolga aylanadigan) funksiyalar sinfini belgilaymiz. Bu shart - Bessel operatorining $x_i = 0$ nuqtadagi tabiiy chegara sharti bo'lib, quyida ko'rsatiladigan formal o'z-o'ziga qo'shmalik xossasi uchun zarurdir.

TAHLIL VA NATIJALAR

Ushbu bo'limda tadqiqotning asosiy natijalari - Laplas-Bessel operatorining qat'iy ta'rifi hamda uning algebraik va analitik xossalarga oid teorema, lemma va tasdiqlar - to'liq isbotlari bilan keltiriladi.

Bir o'lchamli Bessel operatori

2-ta'rif. $\gamma > 0$ bo'lsin. $(0, \infty)$ da ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi f funksiya uchun

$$B_{\gamma,x} f(x) := f(x) + (\gamma/x) f(x) = (1/x^\gamma) d/dx (x^\gamma f(x)) \quad (3.1)$$

ifoda Bessel differensial operatori deyiladi.

(3.1) dagi ikkinchi tenglik oddiy hisoblash bilan tekshiriladi:

$$(1/x^\gamma) d/dx (x^\gamma f) = (1/x^\gamma) (\gamma x^{\gamma-1} f + x^\gamma f') = (\gamma/x) f + f'$$

Bessel operatorining klassik Laplas operatori bilan bog'liqligini quyidagi ma'lum faktga ko'ramiz.

1-lemma. $u(x) = f(|x|)$, $x \in R^n$, $|x| = r > 0$ funksiya radial (sferik-simmetrik) bo'lsin. U holda

$$\Delta u(x) = f''(r) + ((n-1)/r) f'(r) = B_{n-1,r} f(r).$$

Isbot. Sferik koordinatalarda $r = |x| = (\sum x_i^2)^{1/2}$ bo'lganda, $\partial r / \partial x_i = x_i / r$. Zanjir qoidasiga ko'ra

$$\partial u / \partial x_i = f'(r) x_i / r,$$

$$\partial^2 u / \partial x_i^2 = f''(r) x_i^2 / r^2 + f'(r) (1/r - x_i^2 / r^3) = f''(r) x_i^2 / r^2 + f'(r) (r^2 - x_i^2) / r^3.$$

Bu ifodani $i = 1, \dots, n$ bo'yicha yig'ib, $\sum x_i^2 = r^2$ ekanligidan foydalanib:

$$\Delta u = \sum \partial^2 u / \partial x_i^2 = f''(r) \cdot 1 + f'(r) \cdot (nr^2 - r^2) / r^3 = f''(r) + ((n-1)/r) f'(r).$$

Bu esa (3.1) ta'rifiga ko'ra $B_{n-1,r} f(r)$ ga teng. Lemma isbotlandi.

Bu lemma shuni ko'rsatadiki, klassik Laplas operatori radial funksiyalar sinfiga aynan bir o'lchamli Bessel operatoriga aylanadi, bunda $\gamma = n - 1$ - fazo o'lchamidan bir kam songa teng. Aynan shu kuzatish Laplas-Bessel operatorini umumiy $\gamma > 0$ uchun kiritish g'oyasining tabiiy manbai hisoblanadi [1-4].

Ko'p o'lchamli Laplas-Bessel operatori

3-ta'rif (Kipriyanov [1]). $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, $\gamma_i > 0$ bo'lsin. $R_{k,+}^n$ da aniqlangan, $C^2(R_{k,+}^n)$ sinfiga tegishli funksiya uchun

$$\Delta_B u(x) := B_{\gamma_1,x_1} u + B_{\gamma_2,x_2} u + \dots + B_{\gamma_k,x_k} u + \partial^2 u / \partial x_{k+1}^2 + \dots + \partial^2 u / \partial x_n^2 \quad (3.2)$$

ifoda Laplas-Bessel operatori (yoki Kipriyanov operatori) deyiladi. $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ songa operatorning *vazni* deyiladi.

$k = 0$ (yoki barcha $\gamma_i = 0$) bo'lganda Δ_B klassik Laplas operatoriga aylanishi (3.2) dan bevosita ko'rinadi, ya'ni $\Delta_B - \Delta$ ning tabiiy singular umumlashmasidir.

Formal o'z-o'ziga qo'shmalik

1-teorema (B-Grin formulasi). $u, v \in C^2_\gamma(R_{k,+}^n) \cap C^1(\text{cl } R_{k,+}^n)$ funksiyalar mos ravishda tez kamayuvchi (finit) tayanchli yoki cheksizlikda yetarlicha tez nolga intiluvchi bo'lsin. U holda

$$\int_{R_{k,+}^n} (\Delta_B u) v d\mu_\gamma(x) = - \int_{R_{k,+}^n} \nabla u \cdot \nabla v d\mu_\gamma(x) = \int_{R_{k,+}^n} u (\Delta_B v) d\mu_\gamma(x).$$

Isbot. Avval bitta $i \leq k$ o'zgaruvchi bo'yicha ko'ramiz. Bir o'lchamli qisman integrallash formulasini $x_i^{\gamma_i}$ vazn bilan qo'llaymiz:

$$\int_{R_{k,+}^n} (B_{\gamma_i,x_i} u) v x_i^{\gamma_i} dx_i = \int_0^\infty \partial / \partial x_i (x_i^{\gamma_i} \partial u / \partial x_i) v dx_i.$$

Qismlab integrallab (chegara hadlari u, v ning tez kamayuvchanligi va C^∞_γ sinfiga tegishliligi — ya'ni $x_i = 0$ da $x_i^{\gamma_i} u'(x_i) \rightarrow 0$ sharti - tufayli yo'qoladi):

$$= [x_i^{\gamma_i} u' v]_0^\infty - \int_0^\infty x_i^{\gamma_i} u' v' dx_i = - \int_0^\infty x_i^{\gamma_i} (\partial u / \partial x_i) (\partial v / \partial x_i) dx_i.$$

$i > k$ o'zgaruvchilar uchun bu — odatdagi Grin formulasi bo'lib (vaznsiz, ya'ni $\gamma = 0$ xususiy hol sifatida), xuddi shunday natija beradi. Barcha $i = 1, \dots, n$ bo'yicha qo'shib va $R_{k,+}^n$ dagi qolgan o'zgaruvchilar bo'yicha integrallab,



$\int R_{k,+}^n (\Delta_B u) v \, d\mu_v = - \int R_{k,+}^n \sum_i (\partial u / \partial x_i) (\partial v / \partial x_i) \, d\mu_v = - \int \nabla u \cdot \nabla v \, d\mu_v$ hosil bo'ladi. Bu ifoda u va v ga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun, xuddi shu jarayonni teskari tartibda takrorlab, o'ng tomondagi ifoda o'sha integralga ham tengligini olamiz. Teorema isbotlandi.

1-natija (formal o'z-o'ziga qo'shmalik). Δ_B operatori $L_{2,Y}(R_{k,+}^n)$ fazosida, mos chegara shartlarini qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfidagi, formal o'z-o'ziga qo'shma operatoridir:

$$\langle \Delta_B u, v \rangle_{L_{2,Y}} = \langle u, \Delta_B v \rangle_{L_{2,Y}}.$$

Bundan tashqari, $u = v$ holda $\langle \Delta_B u, u \rangle = - \|\nabla u\|_{L_{2,Y}}^2 \leq 0$ bo'lib, bu $-\Delta_B$ operatorining musbat (yarim aniqlangan) ekanligini bildiradi - bu klassik $-\Delta$ operatorining mos xossasining to'g'ridan-to'g'ri umumlashmasidir.

Bir jinslilik xossasi

1-tasdiq. Ixtiyoriy $\lambda > 0$ va u funksiya uchun $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$ desak,

$$\Delta_B(u_\lambda)(x) = \lambda^2 (\Delta_B u)(\lambda x).$$

Isbot. $\partial u_\lambda / \partial x_i = \lambda (\partial u / \partial x_i)(\lambda x)$, $\partial^2 u_\lambda / \partial x_i^2 = \lambda^2 (\partial^2 u / \partial x_i^2)(\lambda x)$. $i \leq k$ uchun B_{y_i, x_i} operatorining ta'rifiga ko'ra:

$$B_{y_i, x_i} u_\lambda(x) = \lambda^2 (\partial^2 u / \partial x_i^2)(\lambda x) + (y_i / x_i) \lambda (\partial u / \partial x_i)(\lambda x)$$

$$= \lambda^2 [(\partial^2 u / \partial x_i^2)(\lambda x) + (y_i / (\lambda x_i)) (\partial u / \partial x_i)(\lambda x)] = \lambda^2 (B_{y_i, y_i} u)(\lambda x),$$

bunda $y = \lambda x$. $i > k$ uchun ham xuddi shunday $\lambda^2 (\partial^2 u / \partial y_i^2)(\lambda x)$ chiqadi. Yig'indini olsak, tasdiq isbotlanadi.

Bu xossa Δ operatorining 2-darajali bir jinsli (gomogen) differensial operator ekanligini, ya'ni klassik Laplasianning bir jinslilik darajasini saqlab qolishini ko'rsatadi.

Umumlashgan siljish operatori bilan bog'liqlik

Δ_B operatorining eng muhim analitik xossalardan biri uning B.M. Levitan tomonidan kiritilgan umumlashgan siljish (generalized translation yoki Delsart siljishi) operatori T^y bilan kommutativligidir [3, 4]. Bir o'lchamli holda T^y operatori quyidagi integral ifoda orqali aniqlanadi:

$$T^y_x f(x) = c_y \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) \sin^{y-1} \theta \, d\theta, \quad (4.1)$$

bu yerda $c_y = \Gamma((y+1)/2) / (\sqrt{\pi} \Gamma(y/2))$ - normallashtiruvchi konstanta bo'lib, $T^y_x 1 = 1$ shartidan aniqlanadi.

(4.1) ifodasi klassik siljish operatori $f(x) \mapsto f(x+y)$ ning "sferik o'rtacha" ma'nosidagi tabiiy umumlashmasi bo'lib, $y = n-1$ xususiy holda n -o'lchamli sferada olingan o'rtacha qiymatga mos keladi.

2-teorema (Levitan [3]; qarang [4]). T^y_x operatori $B_{y,x}$ operatori bilan kommutativdir:

$$B_{y,x}(T^y_x f) = T^y_x(B_{y,x} f).$$

Ushbu teorema — asosiy vosita bo'lib, uning yordamida Δ ga bog'liq umumlashgan konvolyutsiya, Furry–Bessel almashtirishi (Hankel almashtirishi) va Riss–Bessel potentsiallari nazariyasi quriladi [4-6]. Ushbu maqola doirasida biz (4.1) va 2-teorema natijalarini qat'iy isbotlamasdan, adabiyotga [3, 4] havola qilgan holda keltiramiz, chunki ularning to'liq isboti Bessel funksiyalarining additiv teoremasiga asoslangan bo'lib, alohida tadqiqot mavzusi darajasidir.

Fundamental yechim. Δ_B operatorining fundamental yechimi masalasi ilk marta I.A. Kipriyanov va uning maktabi tomonidan o'rganilgan [1], so'ngra L.N. Lyakhov va uning hammualliflari tomonidan to'liq umumlashtirilgan [8, 9]. Klassik Laplas operatoridan farqli o'laroq, Δ_B operatorining fundamental yechimi ikkita xarakterli singulyarlikka ega bo'ladi: birinchisi - klassik holdagidek $x = 0$ nuqtada, ikkinchisi esa - $|x| = |y|$ konusida (bu ikkinchi singulyarlik operatorning singular koeffitsientli ekanligi bilan bog'liq bo'lib, faqat $y > 0$ bo'lgan holatlarga xosdir) [8].

Aniqrog'i, quyidagi natija o'rinli:

3-teorema ([8, 9], qisqartirilgan bayoni). $|y| = y_1 + \dots + y_k$, $N = n + |y|$ bo'lsin. U holda $R_{k,+}^n$ yarim fazoda Δ_B operatorining $E_y(x, y)$ fundamental yechimi mavjud bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

(i) $\Delta_{B,x} E_y(x, y) = 0$ barcha $x \neq y$ uchun (umumlashgan siljish ma'nosida, $x = y$ nuqtada singulyarlik hosil bo'ladi);

(ii) $x \rightarrow y$ da $E_y(x, y) \sim c_N |x - y|^{2-N}$ ($N > 2$ bo'lganda), klassik Laplas operatorining fundamental yechimiga o'xshash tarzda;

(iii) bundan tashqari, E_y funksiya Bessel funksiyalari orqali ifodalanadigan qo'shimcha singulyarlikka $|x| = |y|$ to'plamda ega bo'ladi.

Bu natijaning to'liq isboti Furry-Bessel (Hankel) almashtirishi va (4.1) umumlashgan siljish operatoridan foydalanishga asoslanadi; batafsil isbot [8, 9] da keltirilgan.

Yuqorida keltirilgan natijalar Laplas–Bessel operatorining klassik Laplas operatoriga nisbatan tutgan o'rnini va undan farqlarini aniq ko'rsatadi. 1-lemma shuni tasdiqlaydiki, Δ operatori sun'iy umumlashma emas, balki klassik Laplas operatorining radial funksiyalar sinfidagi tabiiy tarkibiy qismidir; shu bois uning xossalari (1-teorema, 1-natija, 1-tasdiq) klassik Laplas operatorining mos xossalari aynan takrorlaydi, faqat vaznli o'lchov $d\mu$ ishtirokida. Bu - operator nazariyasining ichki izchilligini ko'rsatadi: $-\Delta$ operatorining musbatligi (1-natija) klassik potentsiallar nazariyasidagi barcha asosiy energetik baholarni vaznli holga o'tkazish imkonini beradi.

Tenglamalar nazariyasidagi tatbiqlar

Δ_B operatori asosida Kipriyanov [1] quyidagi tenglamalar sinflarini kiritdi:

B-elliptik tenglama: $\Delta_B u = f(x)$, yoki umumiyroq holda $\Delta_B u + c(x)u = f(x)$;

B-parabolik tenglama: $\partial u / \partial t = \Delta_B u + f(x, t)$ - singular issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, aksial-simmetrik issiqlik jarayonlarini tavsiflaydi;

B-giperbolik tenglama: $\partial^2 u / \partial t^2 = \Delta_B u + f(x, t)$ - jumladan, klassik Eyler-Puasson-Darbu tenglamasi ham ushbu sinfning xususiy holdidir.

Bu tenglamalar sinfi doirasida chegaraviy va boshlang'ich-chegaraviy masalalarning qo'yilishi, yechimning mavjudligi, yagonaligi va sifat xossalari (maksimum prinsipi, energetik baholar, vaznli Sobolev fazolarida ilova teoremlari) [1, 5, 6] da batafsil o'rganilgan. 1-teoremda isbotlangan B-Grin formulasi aynan shu tenglamalar uchun zaif (variatsion) yechim tushunchasini kiritish va energetik metod bilan mavjudlik-yagonalik teoremlarini isbotlash uchun asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi.

Fundamental yechim va garmonik tahlildagi o'rni. 3-teoremda qayd etilgan ikkilamchi singulyarlik hodisasi (nafaqat $x = y$ nuqtada, balki $|x| = |y|$ konusida ham) - Laplas-Bessel operatori nazariyasini klassik potentsiallar nazariyasidan ajratib turuvchi eng muhim sifat farqidir. Aynan shu hodisa operatorga bog'liq Riss-Bessel potentsiallari, singular integrallar va Hankel almashtirishi nazariyasining o'ziga xos, ancha murakkab tuzilishga ega bo'lishiga sabab bo'ladi [5, 6]. 2-teoremda keltirilgan umumlashgan siljish operatori bilan kommutativlik xossasi esa aynan ushbu qiyinchilikni yengishning asosiy vositasi hisoblanadi: u klassik Fyurje garmonik tahlilining ko'p natijalarini (masalan, konvolyutsiya, ko'paytiruvchilar nazariyasi) Laplas-Bessel operatoriga mos "B-garmonik tahlil" holiga umumlashtirish imkonini beradi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ushbu maqolada keltirilgan 1-teorema va 1-tasdiq mustaqil ravishda to'liq isbotlangan bo'lsa-da, 2- va 3-teoremlar (Levitan kommutativlik xossasi va fundamental yechim mavjudligi) o'z tabiatiga ko'ra ancha chuqur natijalar bo'lib, ularning to'liq isboti maxsus integral almashtirishlar apparatini talab qiladi va shu sababli adabiyotga tayanilgan holda keltirildi. Bu - ilmiy maqolalarda odatiy holat bo'lib, yangi natijalarni mavjud fundamental teoremlar zaminida qurish tamoyiliga mos keladi.

XULOSA VA TAKLIFLAR

Ushbu maqolada Laplas-Bessel operatorining qat'iy ta'rifi keltirildi va uning bir necha asosiy xossasi - klassik Laplas operatori bilan bog'liqligi (1-lemma), formal o'z-o'ziga qo'shmalik (1-teorema va 1-natija) hamda bir jinslilik (1-tasdiq) - to'liq isbotlari bilan bayon qilindi. Bundan tashqari, operatorning umumlashgan siljish operatori bilan bog'liqligi, fundamental yechimi va u asosida qurilgan B-elliptik, B-parabolik va B-giperbolik tenglamalar sinflari haqida umumiy nazariy sharh berildi. Keltirilgan natijalar Laplas-Bessel operatori nazariyasining zamonaviy singular differensial tenglamalar va garmonik tahlil sohalarida tutgan markaziy o'rnini ko'rsatadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Kipriyanov I.A. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi. - Moskva: Nauka, 1997.
2. Kipriyanov I.A. Boundary value problems for elliptic partial differential equations // Soviet Math. Dokl. - 1970. - Vol. 11. - P. 1416-1419.
3. Levitan B.M. Razlozheniya po funktsiyam Besselya v ryady i integraly Fure // Uspekhi Mat. Nauk. - 1951. - T. 6, № 2(42). - S. 102-143.
4. Levitan B.M. Teoriya operatorov obobshchennogo sdviga. - Moskva: Nauka, 1973.
5. Gadjiev A.D., Guliyev V.S. Two weighted inequalities for singular integrals in Lebesgue spaces associated with the Laplace-Bessel differential operator // Proc. A. Razmadze Math. Inst. - 2005. - Vol. 138. - P. 1-15.
6. Guliyev V.S. Sobolev theorems for B-Riesz potentials // Doklady AN SSSR. - 1987. - Vol. 358, № 4. - P. 450-451.
7. Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. - Amsterdam: Elsevier, 2020.
8. Lyakhov L.N. Fundamental solutions of singular differential equations with a Bessel DB operator // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. - 2012. - Vol. 278. - P. 139-151.
9. Lyakhov L.N., Roshchupkin S.A., Bulatov Yu.N. Pseudoshift and the fundamental solution of the Kipriyanov Δ_B -operator // Differential Equations. - 2023.

muhandislik **& iqtisodiyot**

ijtimoiy-iqtisodiy, innovatsion texnik,
fan va ta'limga oid ilmiy-amaliy jurnal

Ingliz tili muharriri: Feruz Hakimov

Musahhih: Zokir Alibekov

Sahifalovchi va dizayner: Abdurahmon Qurbonov

2026. № 9

© Materiallar ko'chirib bosilganda "Muhandislik va iqtisodiyot" jurnali manba sifatida ko'rsatilishi shart. Jurnalda bosilgan material va reklamalardagi dalillarning aniqligiga mualliflar ma'sul. Tahririyat fikri har vaqt ham mualliflar fikriga mos kelamasligi mumkin. Tahririyatga yuborilgan materiallar qaytarilmaydi.

"Muhandislik va iqtisodiyot" jurnali 26.06.2023-yildan
O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Adminstratsiyasi huzuridagi
Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan
№S-5669245 reyestr raqami tartibi bo'yicha ro'yxatdan o'tkazilgan.
Litsenziya raqami: №095310.

**Manzilimiz: Toshkent shahri Yunusobod
tumani 15-mavze 19-uy**





+998 93 718 40 07



<https://muhandislik-iqtisodiyot.uz/index.php/journal>



t.me/yait_2100